

THESES

présentées

A L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD — CENTRE D'ORSAY

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

COHEN Guy

- 1^{ere} THÈSE **Contribution à la théorie de la commande décentralisée
et à la coordination en ligne des systèmes dynamiques.**
- 2^{eme} THÈSE : **Propositions données**

Soutenues le 22 octobre 1975 devant la Commission d'examen

MM. PICINBONO

Président

**BENSOUSSAN
BERNHARD**

Examineurs

AVANT - PROPOS

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide et le soutien d'un grand nombre de personnes dont quelques unes seulement seront mentionnées ici.

Je tiens à remercier, en premier lieu, le Professeur PICINBONO pour m'avoir fait l'honneur de patronner cette thèse et présider le Jury de soutenance.

En second lieu, mes remerciements vont au Professeur BENSOUSSAN pour s'être intéressé à mes travaux et avoir accepté de faire partie du Jury.

Ce travail a été effectué au Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines de Paris, à Fontainebleau sous la direction de son Directeur, M.P. BERNHARD. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour m'avoir initié à l'Automatique et avoir été, depuis mon arrivée au Centre, le conseiller avisé et toujours disponible, ainsi que le collaborateur compétent.

Je n'oublierai pas d'associer à ces remerciements M.A. BENVENISTE qui fut pendant deux ans un autre compagnon de réflexion sur le sujet de ce travail.

Tous mes collègues du Centre d'Automatique trouveront ici leur part de reconnaissance pour leur contribution, à des titres divers, à l'accomplissement de ce travail et le climat favorable qu'ils ont contribué à créer.

Enfin, je tiens à remercier Mme LE GALLIC pour sa diligence dans la réalisation matérielle de cette thèse.

INTRODUCTION	1
1. Décomposition des calculs	1-3
2. Décomposition verticale	3-4
3. Décomposition horizontale	4-6
4. Structure d'information décentralisée	6-7
5. Plan général	7-9
CHAPITRE I : FORMALISME ET PRINCIPES DE COORDINATION	
1. Formalisme - Modes de coordination	10-14
2. Applicabilité - Coordinabilité	14-17
3. Coordination par découplage de problèmes munis d'une fonction objective apparente.	17-22
4. Coordination par prédiction. Comparaison des deux principes de coordination	22-26
CHAPITRE II : ALGORITHME DE TAKAHARA ET EXTENSIONS	
1. Une tentative de coordination par découplage de système dynamique	27-30
2. Algorithme de TAKAHARA et généralisation	30-32
3. Une version plus commode et un algorithme en ligne heuristique	32-34
CHAPITRE III : PREDICTION ET OPERATEUR D'INTERACTION. THEORIE ET ALGORITHME	
1. Coordination par prédiction et opérateur d'interaction	35-39
2. Algorithme de réinjection. Convergence dans le cas quadratique	39-43
3. Application à la commande optimale linéaire-quadratique	44-51
4. Lien entre l'algorithme de TAKAHARA et notre algorithme	51-52
CHAPITRE IV : ETUDE DU FONCTIONNEMENT DEGRADÉ. AUTRES APPLICATIONS DE L'ALGORITHME GENERAL.	
1. Fonctionnement dégradé	53-55
2. Problème linéaire-quadratique à temps discret	55-59
3. Problème linéaire-quadratique à temps continu le plus général	60-64

4. Problème de commande optimale non linéaire	65-68
---	-------

CHAPITRE V : RESULTATS NUMERIQUES

1. L'exemple numérique	69-70
2. Etude du choix des matrices \bar{Q} et \bar{R}	71
3. Résultats et Conclusions	72
Fig. 1 à Fig 4.	73-77

CHAPITRE VI : UN CAS DE DECOMPOSITION COMPLETE

1. Le problème de la décomposition - Quelques considérations	78-79
2. Résultats préliminaires	79-84
3. Une condition suffisante de décomposition complète du problème du régulateur stationnaire	84-88
4. Procédure pratique de résolution et de changements de base	88-90
5. Conclusions	91-93

CHAPITRE VII : CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES SUR LA COORDINATION EN LIGNE

1. Notion de coordination en ligne. Intérêt et difficulté.	94-95
2. Découplage séparé de la dynamique et du critère	96-98
3. Perspectives sur la commande décentralisée en boucle fermée et la coordination en ligne	98-99

REFERENCES	100-104
------------	---------

ANNEXE 1 : COORDINATION PAR ALLOCATION	105-107
--	---------

ANNEXE 2 : PROPRIETES DES OPERATEURS Φ	108-109
---	---------

ANNEXE 3 : RESOLUTION DU PROBLEME LINEAIRE-QUADRATIQUE A TEMPS DISCRET	110-112
--	---------

ANNEXE 4 : RESOLUTION DU PROBLEME LINEAIRE-QUADRATIQUE A TEMPS CONTINU LE PLUS GENERAL	113-114
--	---------

INTRODUCTION

Parmi les problèmes soulevés par ce qu'aucuns appellent la "Théorie de la Commande Hiérarchisée", il en est un qui est remarquable : c'est celui de l'appellation même de ce secteur des mathématiques de l'optimisation statique ou dynamique. En effet, on a employé à son égard, simultanément ou successivement, les termes de "décomposition", "commande ou systèmes hiérarchisé(e)(s) ou à plusieurs niveaux", "décentralisation", "coordination" etc...

Cette indétermination verbale cache sans doute une indétermination conceptuelle sur l'objet de cette théorie. Il faut en fait convenir que l'on a tendance à confondre plusieurs types de problèmes dont le dénominateur commun est semble-t-il la présence d'un système complexe. Nous nous proposons dans un premier temps de tenter de mettre un peu d'ordre dans cette classification afin de situer ce travail par rapport à l'ensemble de la théorie.

Il faut commencer par cerner la notion de "système complexe". Sans revenir sur le concept de système, on peut dire que les ingrédients principaux d'un système complexe sont (avec la préposition "et" ou la préposition "ou") : la taille du système (se mesurant au nombre de variables, classées généralement en variables d'états, de commandes, d'observations, et au nombre de contraintes), la structure du système dans l'espace (décomposition verticale, horizontale ; nous y reviendrons), dans le temps (phénomènes de "constantes de temps" très différentes), dans les circuits d'information (ce dernier point peut à lui seul rendre "complexe" un problème stochastique).

1. Décomposition des calculs.

On peut alors dire que l'aspect "décomposition des calculs" se réfère plus spécialement aux systèmes de grande taille, ce qui doit être compris comme des systèmes occasionnant des problèmes d'optimisation (par exemple) difficilement solubles ou même

insolubles avec la capacité des ordinateurs actuels (capacité en taille mémoire mais aussi en précision numérique). En décomposant le problème en problèmes plus petits, on peut espérer parvenir à le résoudre sur un ordinateur de taille raisonnable ou plusieurs ordinateurs travaillant en parallèle. Cela suppose bien sûr une "coordination" des divers sous-problèmes nécessitée par la présence d'interactions entre ceux-ci. Nous y reviendrons. Soulignons seulement parmi les avantages d'une telle approche :

- sur le plan du matériel, la possibilité de résoudre de "gros" problèmes sur un "petit" ordinateur, et la non-obsolescence de ce dernier si la taille du problème augmente par adjonction de sous-problèmes.
- sur le plan humain, la possibilité de résoudre des problèmes complexes sans recours à des méthodes sophistiquées donc sans recours à des compétences spéciales. Citons par exemple l'éventualité de ramener une optimisation dans un espace compliqué à des optimisations dans \mathbb{R} permettant une recherche scalaire, ou bien la résolution de problèmes à paramètres répartis (dérivées partielles) par des méthodes plus traditionnelles (WISMER [40], TITLI [38]).

Cet aspect "décomposition des calculs" rejoint donc des préoccupations de résolution hors-ligne. Il n'est pas évident (et c'est généralement faux) que le volume total des calculs dans une approche décomposée-coordonnée soit inférieur au volume de calculs nécessitée par une approche globale. Mais, répétons le, on utilise cette approche lorsqu'une résolution globale est impossible ou trop difficile. Un cas typique est celui où le problème doit être résolu numériquement par la programmation dynamique discrétisée (en raison de la croissance très rapide du volume de calculs avec le nombre de variables dans cette méthode). Cependant, on notera, dans ce cas, que la loi en boucle fermée obtenue est alors seulement localement en boucle fermée (car chaque partie de la commande ne dépend que de la partie correspondante de l'état). Ceci n'empêche pas l'optimalité dans le cas

déterministe (on complète par une commande en boucle ouverte) mais cette remarque explique en partie la réduction du volume des calculs.

La décomposition du problème peut s'appuyer sur une décomposition "naturelle" du système mais ce n'est pas nécessaire. Notons qu'un problème important mais pour lequel peu de résultats ont été obtenus car il est très difficile est celui de la meilleure décomposition, le critère même définissant la meilleure décomposition restant difficile à cerner et pouvant se référer à la vitesse de convergence du processus de coordination. Nous aborderons cependant, dans un cadre précis au chapitre 6, un cas de décomposition complète bien que non triviale.

Nous classerons dans cet aspect "décomposition des calculs" les travaux de DANTZIG-WOIFE [19], de LASDON et al. [10, 27, 28], ceux de GEOFFRION [22, 23] en optimisation statique, et en optimisation dynamique ceux de TAKAHARA [35], PEARSON [32], BAUMAN [3], etc... En France, citons les premiers travaux de TITLI [38], FOSSARD et al. [20], BENSOUSSAN et al. [4].

2. Décomposition verticale

La "décomposition verticale" de la commande justifie le terme de "commande hiérarchisée" (ou à plusieurs niveaux). Elle est généralement liée au déroulement simultanée, dans un système complexe, de divers phénomènes à des échelles de temps très différentes. Ainsi, dans une grande entreprise industrielle, les processus de fabrication doivent parfois être contrôlés à la seconde près, le planning des ateliers à la journée ou à la semaine et ainsi de suite, jusqu'au niveau le plus haut de la hiérarchie où les décisions peuvent être seulement mensuelles.

Cette montée dans la hiérarchie s'accompagne d'une élaboration de plus en plus grande de l'information. Certains auteurs comme MESAROVIC et al. [30] ont distingué plusieurs concepts de "niveaux" suivant le point de vue où l'on se place. Nous citerons la décomposition verticale qui nous paraît la plus significative : régulation, optimisation, adaptation, organisation.

Cependant il faut convenir que, pour utiles que soient ces concepts, peu de résultats mathématiques significatifs nous semblent avoir été obtenus à ce jour. Les travaux d'AOKI [1] sur l'agrégation, permettant de construire des modèles plus ou moins agrégés d'un même système, peuvent être reliés à cette approche de décomposition verticale.

3. Décomposition horizontale

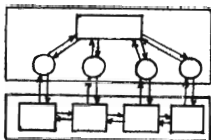
La "décomposition horizontale" du système a souvent servi de base à la décomposition des calculs. La plupart des papiers cités au §1 peuvent à la rigueur entrer aussi dans cette catégorie (sauf celui de BAUMAN [3]). Cependant la "décomposition horizontale" fait référence plus spécialement à la structure physique du système. Celui-ci peut-être regardé comme la concaténation de plusieurs systèmes plus petits et interactifs. Cela se traduit mathématiquement par la décomposition des vecteurs d'état et de commande en plusieurs sous-vecteurs et l'introduction de variables d'interaction reliées par une relation de couplage aux variables précédentes.

Notons ce point très rarement souligné dans la littérature de l'existence explicite de variables d'interaction dans la théorie de MESAROVIC et al.[30], ce qui permet, en particulier, la "coordination par prédiction des interactions" (voir chapitre 1) Celle-ci a été confondue parfois avec une autre méthode de coordination que nous appellerons "allocation" (cf. GEOFFRION [23], BROSILOW et al. [10]) où l'interaction entre les sous-problèmes peut ne provenir que d'un partage de ressources communes et donc d'une contrainte couplante comme dans [23] et non de l'existence explicite de variables d'interaction (cf. Annexe 1).

La figure 1 représente la décomposition horizontale du système en sous-systèmes interactifs, chacun étant muni d'un contrôleur local à un premier niveau et l'ensemble étant coordonné à un deuxième niveau. Cette structure à deux niveaux peut servir de "pierre élémentaire" pour une structure à plusieurs niveaux.

Commande

Système



Actions \updownarrow Informations

\rightleftharpoons Interactions

Fig 1

C'est sans doute là une source de confusion avec les "niveaux de commande" du §2.

Cette structure de décomposition horizontale justifie le terme de décentralisation, dans la mesure où chaque contrôleur local élabore et applique une partie de la commande directement sur le sous-système dont il a la charge. Il est aidé pour cela par un coordonnateur qui est chargé d'orienter les actions du premier niveau vers la satisfaction d'un certain optimum global.

C'est dans ce cadre que se situe principalement le présent travail. Il nous semble donc que la meilleure appellation correspondante est celle de "théorie de la décentralisation-coordination".

De plus, on pressent aisément que, contrairement au point de vue du §1, le point de vue adopté ici (et au §2) privilégie l'aspect de la commande en ligne. Nous reviendrons plus longuement au chapitre 7 sur la notion de coordination en ligne.

Les avantages d'une telle structure de commande sont ceux déjà mentionnés au §1 pour l'élaboration de la commande, auxquels s'ajoutent les suivants, à la fois pour son élaboration et sa mise en œuvre :

- la répartition de la décision et de sa mise en œuvre entre plusieurs centres, par opposition à une centralisation "dans une seule main" assure une plus grande sécurité en vertu du vieil adage "ne mettez pas tous vos oeufs dans le même panier". On verra au chapitre 4 une illustration de cet aspect. CHENEVEAUX [11] semble avoir été préoccupé par cette sécurité de mise en œuvre mais non par la répartition du travail d'élaboration de la commande.

- la structure décentralisée assure une plus grande souplesse dans la mise en place qui peut-être faite progressivement, par morceaux successifs.
- Un autre aspect important est celui des possibilités d'adaptation en cas de croissance ou de changement survenant dans le système par adjonction ou modification de sous-systèmes. Les effets de ces modifications sont localisées et ne remettent pas en cause la structure d'ensemble. Cette remarque rejoint celle de la non-obsolésence rapide des moyens de calcul faite au §1.
- Enfin, du point de vue humain, on sait quels avantages sont ressentis par les agents d'une structure pyramidale lorsque la décision n'est pas centralisée au plus haut niveau, réduisant ceux-ci au rôle de simples exécutants. Il semble préférable que le processus de décision respecte la structure physique du système afin de maintenir une grande partie de la décision près du système (réduisant notamment les temps de réponse de l'organe de commande à des perturbations imprévisibles).

4. Structure d'information décentralisée.

Terminons cette énumération forcément incomplète sur les divers aspects de cette théorie encore récente par la mention d'une tendance actuelle concernant l'adaptation de la théorie aux systèmes stochastiques. Dans cette approche (cf. MARSHAK et RADNER [29], HO et CHU [24], CHONG et ATHANS [12], AOKI [2]), aucune décomposition verticale de la commande, ou horizontale du processus n'est envisagée. Par contre, on peut distinguer une décomposition horizontale de la commande. De plus le niveau coordonnateur est le plus souvent inexistant, mais peut exister, à moins que les agents locaux ne communiquent directement entre-eux. La structure est schématisée sur la figure 2.

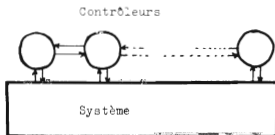


Fig.2

Chaque contrôleur est autorisé à faire des calculs avec un modèle de dimension égale voire largement supérieure à celle du système global (contrairement au §.3) mais ne dispose d'information en temps réel pour "fermer la boucle" que sur une partie de l'état (observation incomplète). Il peut parfois disposer, avec délai, des informations dont disposent les autres contrôleurs.

Ces problèmes sont en fait ceux de la commande stochastique avec structure d'information non classique (cf. WITSENHAUSEN [41]) et peu d'entre eux ont reçu à ce jour une solution pratique. Ils sont déjà difficiles indépendamment de considération de "grande taille".

5. Plan général

Ayant défini le point de vue où se situe le présent travail, nous repréhendons dans un premier chapitre l'essentiel du formalisme développé par MESAROVIC et al.[30] afin d'introduire les méthodes et le vocabulaire. Nous comparerons deux principes importants [31] de coordination, en laissant de côté (annexe I) un troisième principe peu utile pour les systèmes dynamiques, et nous justifierons ainsi le choix de l'un de ces deux principes pour l'appliquer aux systèmes dynamiques.

Le chapitre 2 commencera par un rappel de l'algorithme de TAKAHARA [35] dont le champ d'application sera étendu par la levée d'hypothèses restrictives. On modifiera la formulation de cet algorithme, ce qui conduira à une mise en oeuvre en ligne heuristique. On rapporte en [18] les résultats numériques peu satisfaisants obtenus par cette approche.

Le chapitre 3 reprend alors le problème à la base en appliquant systématiquement les techniques de MESAROVIC au cas des systèmes dynamiques, c'est-à-dire en menant les calculs dans des espaces fonctionnels (dimension infinie) adéquats. Cette approche est plus satisfaisante et surtout plus puissante que celle qui avait été adoptée par les auteurs eux-mêmes. (cf. TAKAHARA et MESAROVIC [36]).

Nous obtiendrons ainsi un nouvel algorithme de coordination dans le cas linéaire-quadratique, champ d'application de l'algorithme de TAKAHARA. On montrera le lien du nouvel algorithme avec celui-là. On verra ainsi que l'algorithme de TAKAHARA est un moyen de décomposition des calculs, totalement hors-ligne. Par opposition notre algorithme peut-être considéré comme un algorithme de coordination en ligne, comportant un feedback périodique au niveau coordonnateur, mais encore en boucle ouverte au premier niveau.

Ce chapitre 3 contient l'essentiel de la théorie et une démonstration de convergence dans le cas quadratique. Le chapitre suivant porte sur diverses extensions de l'algorithme précédent. On étudie d'abord le cas des pannes dans certains sous-systèmes ou dans la transmission d'informations au niveau coordonnateur vers ces sous-systèmes et on montre le caractère satisfaisant du comportement de l'algorithme dans cette éventualité. On étend ensuite l'algorithme au problème linéaire-quadratique à horizon fini le plus général (extension due en grande partie à M. DUBOUE, élève-ingénieur de 3e année à l'Ecole des Mines de Paris). On donne une formulation de l'algorithme pour les systèmes à temps discret. Enfin, on développe l'algorithme pour le cas de systèmes non linéaires à critère quelconque, sans preuve de convergence.

Le chapitre 5 est consacré à l'exposé de résultats d'expériences numériques (menées par M. DUBOUE déjà cité).

Le chapitre 6 porte sur un cas particulier de décomposition complète d'un problème linéaire quadratique à horizon infini, cette décomposition n'étant pas évidente a priori.

Enfin, le chapitre, en guise de conclusion, revient sur la notion de coordination. Il s'agit mais en boucle fermée au premier niveau. On analyse la difficulté, dans cet ordre d'idée, de rester fidèle au principe de prédiction des interactions de MESAROVIC. On discute le cas particulier des systèmes linéaires constants où cette difficulté est surmontée par recours à la théorie du découplage (cf. SILVERMAN et PAYNE [34], WONHAM et MORSE [42]). Cette idée est due à BENVENISTE et BERNHARD [5]. On conclue à la nécessité d'un nouveau principe de coordination qui a déjà fait l'objet d'une publication par l'auteur [13] mais qui n'a pas atteint l'état de maturation des méthodes rapportées ici.

CHAPITRE I

FORMALISME ET PRINCIPES DE COORDINATION

Ce chapitre nous permettra d'introduire les concepts de base et la terminologie de l'essentiel de la théorie élaborée par MESAROVIC et ses collaborateurs [30, 31]. Cependant l'exposé est limité aux idées qui seront directement utiles pour la suite. On a essayé de ramener celles-ci à leurs expressions les plus simples dans un but de clarté. Un exposé plus complet peut-être trouvé dans l'ouvrage de BERNHARD [7, chap. 5]. Nous reprendrons ensuite le contenu de l'article de BENVENISTE et COHEN [6], ce qui permettra de comparer le champ d'application des deux principes principaux de coordination de MESAROVIC et al. et de justifier du choix de l'un d'eux pour la suite. L'algorithme du chapitre 3 sera ainsi entrevu par une approche quelque peu différente de celle adoptée plus loin.

1. Formalisme. Modes de coordination.

Le formalisme est directement orienté vers la commande optimale de processus. On se donne donc un modèle d'entrée $u \in U$ et de sortie $y \in Y$ (qui sera souvent pour nous également l'état) :

$$P : U \rightarrow Y \quad (1.1)$$

Les espaces U et Y sont des espaces abstraits ayant généralement la structure topologique d'espaces de Hilbert (mais ce n'est pas utile dans ce paragraphe).

On se donne aussi un critère à minimiser :

$$Q : U \times Y \rightarrow R \quad (1.2)$$

Il en résulte une fonction coût :

$$g : u \rightarrow R ; g(u) = q(u, p(u)) \quad (1.3)$$

Ces éléments définissent le problème global. On suppose maintenant qu'il est possible de décomposer le système global en systèmes "locaux" plus petits et interactifs, de la façon suivante :

$$a) \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_N ; \quad u = u_1 \times \dots \times u_N$$

b) On introduit un nouvel espace, dit "espace des interactions" :

$$V = V_1 \times \dots \times V_N$$

c) On introduit des applications p_i (modèles locaux) :

$$p_i : u_i \times v_i \rightarrow \mathcal{V}_i \quad (1.4)$$

et leur concaténation \bar{p} dans l'ensemble produit, c'est-à-dire si $u = (u_1, \dots, u_N)$, $v = (v_1, \dots, v_N)$:

$$\bar{p}(u, v) = (p_1(u_1, v_1), \dots, p_N(u_N, v_N)) \quad (1.5)$$

d) On introduit une fonction de couplage :

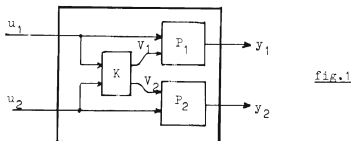
$$K : u \rightarrow V \quad (1.6)$$

qui est telle qu'avec les éléments précédents l'identité suivante soit vérifiée :

$$\forall u \in u, \quad p(u) = \bar{p}(u, K(u)) \quad (1.7)$$

Cette dernière relation signifie que la sortie du système global (1.1) est la concaténation des sorties des sous-systèmes locaux (1.4) lorsque le couplage (1.6) fonctionne. La

situation est représentée schématiquement sur la figure 1 dans le cas de deux sous-systèmes.



On utilisera dans la suite d'autres formes de la fonction de couplage :

$$H : u \times v \rightarrow v \quad (1.8)$$

$$\bar{K} : u \times v \rightarrow v \quad (1.9)$$

avec les identités :

$$\forall u \in u, \quad H(u, p(u)) = K(u),$$

$$\bar{K}(u, K(u)) = K(u)$$

La fonction \bar{K} est généralement définie à partir de H (qui se présente le plus souvent dans les applications) par :

$$\bar{K}(u, v) = H(u, \bar{p}(u, v)) \quad (1.10)$$

REMARQUE : On a insisté ici sur le couplage "par le modèle", dans la présentation ci-dessus, mais il est évident qu'un couplage "par le critère" peut venir du fait que le critère (1.2) n'est pas "séparable" (par exemple additif), en termes de fonctionnelles de (u_i, v_i, y_i) . Cependant, on verra dans la suite qu'aucune difficulté supplémentaire ne surgit de ce fait.

Les problèmes locaux seront définis avec les modèles (1.4) et des critères locaux :

$$Q_i : u_i \times v_i \times \gamma_i \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

où l'introduction d'un espace de paramètre Λ sera justifiée ci-dessous .

En effet, le but de la décentralisation est de définir des problèmes locaux tels que si \hat{u}_i est commande optimale du sous-problème i et si u^* est la commande optimale du problème global, \hat{u}_i soit égal à u_i^* , projection de u^* sur u_i . Pour cela la structure à deux niveaux de la figure 1 de l'introduction est utilisée : les contrôleurs, au premier niveau, résolvent les problèmes locaux posés par le coordonnateur, et éventuellement, mettent en oeuvre les commandes obtenues sur le système réel. Le coordonnateur, pour atteindre l'objectif ci-dessus mentionné, dispose des moyens suivants :

- action sur les critères locaux : c'est à cette fin que l'on a introduit l'espace des paramètres Λ .
- action sur les modèles locaux, ou plus exactement stratégie de gestion des interactions.

Développons ce deuxième point. Remarquons qu'en supposant les critères locaux spécifiés par le choix (au niveau coordonnateur) d'un point de l'espace Λ , les problèmes locaux ne sont pas encore complètement définis puisqu'aux variables de commandes naturelles u_i , viennent s'ajouter maintenant de nouvelles entrées v_i . Nous ne parlerons que de deux modes de gestion de ces interactions. D'autres sont proposés par MESAROVIC et al. (e.g. "estimation principle") mais ne concerne pas directement le problème déterministe sans contrainte posé ici. Un autre enfin, telle l'"allocation" (cf.[23, 10, 38]) nécessiterait pour être utilisée ici une formalisation plus détaillée des interactions et des hypothèses supplémentaires. En annexe 1, un bref exposé est développé pour montrer les difficultés inhérentes à cette méthode

surtout dans le cas des systèmes dynamiques.
Les deux modes dont il est question sont :

- le mode par prédiction des interactions
- le mode par découplage

Le premier mode est sans doute le plus directe et celui qui donne lieu aux problèmes locaux les plus simples. Il consiste à faire assigner, par le niveau coordonnateur, une valeur ("prédiction") α_i aux variables v_i , de telle sorte que les problèmes locaux se formulent alors ($\lambda \in \Lambda$ étant également fixé) :

$$\min_{u_i} Q_i(u_i, \alpha_i, y_i, \lambda) \text{ sous } y_i = p_i(u_i, \alpha_i)$$

Le second mode, dont l'appellation est maladroite mais traduit les termes anglais "decoupling mode", consiste à considérer les variables v_i comme des entrées fictivement manipulées par les contrôleurs locaux au même titre que les commandes u_i . D'où les problèmes :

$$\min_{u_i, v_i} Q_i(u_i, v_i, y_i, \lambda) \text{ sous } y_i = p_i(u_i, v_i)$$

Dans le premier cas, nous noterons $\hat{u}_i(\alpha_i, \lambda)$ une solution optimale locale i , et dans le second cas, on la notera $(\hat{u}_i(\lambda), \hat{v}_i(\lambda))$. Comme déjà dit, le but est de choisir λ (et éventuellement $\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$) de telle sorte que $Q_i = u_i^*$, $i = 1, \dots, N$.

2. Applicabilité - Coordinabilité.

Trois questions se posent alors :

- 1 - Comment déterminer que l'optimum global est atteint ?

2 - Existe-t-il des paramètres λ (et éventuellement α) tels que l'optimum global soit atteint ?

3 - Comment atteindre ces paramètres ?

A ces trois questions correspondent les trois concepts d'applicabilité, de coordonnabilité et d'algorithme coordonnateur.

Il faut d'abord noter que la première question doit recevoir une réponse différente de celle qu'elle reçoit ordinairement dans les problèmes d'optimisation par une approche globale. Dans ce dernier cas, on dispose généralement de conditions nécessaires et (ou) suffisantes d'optimalité (e.g. conditions de stationnarité) et, de plus, ces conditions servent de base à l'élaboration d'algorithmes (question 3). Ici, les calculs étant décentralisés, on évitera de recourir à la vérification de telles conditions, surtout pour la raison qu'une réponse négative ne permettrait pas de faire progresser les variables de façon décentralisée.

L'idée de MESAROVIC est alors de recourir à la vérification d'une condition globale simple, "naturelle" dans le cadre du formalisme adopté, et susceptible de fournir la base d'algorithmes coordonnateurs. Cette condition est le respect du couplage entre la variable de commande \hat{u} choisie au niveau local et la variable d'interaction α (choisie au niveau coordonnateur) ou $\hat{\alpha}$ (choisie au niveau local) :

$$\alpha = K(\hat{u}) \quad ? \quad \text{ou} \quad \hat{\alpha} = K(\hat{u}) \quad ?$$

Cependant des exemples simples (cf. [6, 7]) peuvent être construits pour montrer qu'il n'existe aucune implication logique dans un sens ou dans l'autre, en général, entre la condition ci-dessus et le fait que $\hat{u} = u^*$.

Dans ces conditions, on recherchera les problèmes décentralisés auxquels sont applicables (au sens ci-dessous) l'un ou l'autre des deux principes de coordination mentionnés plus haut.

DEFINITION 2.1.: On dit que le principe de coordination par prédiction des interactions est applicable à un problème décentralisé si l'implication logique suivante est vraie pour ce problème :

$$\forall \lambda \in \Lambda, \forall \alpha \in \gamma : \alpha = K(\hat{\alpha}(\alpha, \lambda)) = \hat{\alpha}(\alpha, \lambda) = u^*.$$

DEFINITION 2.2.: On dit que le principe de coordination par découplage est applicable à un problème décentralisé si l'implication logique suivante est vraie pour ce problème :

$$\forall \lambda \in \Lambda, \hat{\alpha}(\lambda) = K(\hat{\alpha}(\lambda)) = \hat{\alpha}(\lambda) = u^*.$$

Une fois acquise l'une de ces deux propriétés, qui apporte une réponse à la question 1, la question 2 soulève le problème de l'existence de "bons" paramètres de coordination. Ceci donne lieu au concept de coordonnabilité.

DEFINITION 2.3.: On dit qu'un problème décentralisé est coordonnable par prédiction s'il existe des valeurs $\alpha^* \in \gamma$ et $\lambda^* \in \Lambda$ telles que les problèmes locaux aient une solution et que :
 $\alpha^* = K(\hat{\alpha}(\alpha^*, \lambda^*))$.

DEFINITION 2.4.: On dit qu'un problème décentralisé est coordonnable par découplage s'il existe une valeur $\lambda^* \in \Lambda$ telle que les problèmes locaux aient une solution et que :
 $\hat{\alpha}(\lambda^*) = K(\hat{\alpha}(\lambda^*))$.

Enfin, le dernier problème, et non le moindre, est de trouver une procédure qui permet d'atteindre ces valeurs des paramètres de coordination. C'est la question 3 des algorithmes coordonneurs, assez peu développée dans le livre de MESAROVIC et al.[30]. Nous reviendrons au chapitre 3 sur une technique due à ces auteurs, dite de l'opérateur d'interaction, dans le cadre de la coordination par prédiction et nous en dériverons l'algorithme général. Dans la suite du présent chapitre, nous verrons un autre type d'algorithme qui mettra bien en lumière le rôle de l'"écart de couplage" $v - K(u)$ dans la coordination par découplage.

De plus les deux principes de coordination seront comparés sur un type particulier de problème quant à leur applicabilité.

3. Coordination par découplage de problèmes munis d'une fonction objective apparente.

Nous laisserons ici de côté la variable de sortie y qui n'est qu'un intermédiaire dans le problème d'optimisation. Nous nous intéressons donc directement à la fonctionnelle $J(1.3)$. Un type particulier de problème, mais dont la portée est cependant assez générale, est le suivant :

$$J(u) = \sum_{i=1}^N J_i(u_i, K_i(u)) = J(u, K(u)) \quad (3.1)$$

$$\text{et } K_i(u) = \sum_{j=1}^N K_{ij}(u_j) \quad (3.2)$$

(critère et interactions "séparables").

Alors en introduisant un paramètre $\lambda \in V^*$ (espace dual de V) pour la contrainte de couplage $K(u) - v = 0$, on forme le lagrangien.

$$\mathcal{L}(u, v, \lambda) = J(u, v) + \langle \lambda, K(u) - v \rangle \quad (3.3)$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité).

On peut réécrire le lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, v, \lambda) &= \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i(u_i, v_i, \lambda) = \sum_{i=1}^N [\varphi_i(u_i, v_i) + \sum_{j=1}^N \langle \lambda_j, K_{ji}(u_i) \rangle \\ &\quad - \langle \lambda_i, v_i \rangle] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Plus généralement,

DEFINITION 3.1 : On appelle fonction objective apparente associée à une famille de critères locaux $J_i(u_i, v_i, \lambda)$, une application Ψ de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall u \in U, \forall \lambda \in \Lambda : \Psi(J_1(u_1, K_1(u), \lambda), \dots, J_N(u_N, K_N(u), \lambda)) = \varphi(u). \quad (3.5)$$

On vérifie que la fonction Ψ correspondant au cas séparable ci-dessus est la somme de N nombres, et que $\mathcal{L}(u, K(u), \lambda)$ vérifie (3.5). On exige généralement que Ψ soit croissante par rapport à chacun de ses arguments à seule fin que la minimisation de φ corresponde à une minimisation dans chaque sous-problème.

Posant :

$$\mathcal{L}(u, v, \lambda) = \Psi(J_1(u_1, v_1, \lambda), \dots, J_N(u_N, v_N, \lambda)) \quad (3.6)$$

on énonce quelques résultats généraux sur la coordination de tels problèmes par découplage. Ces résultats sont ceux de LASDON et al.[28] dans un formalisme plus général.

THEOREME 3.1 : Etant donné un problème décentralisé possédant une fonction objective apparente croissante, on a :

$$a) \quad \forall \lambda, \inf_U \mathcal{L}(u, v, \lambda) \leq \inf_U \varphi(u) \quad (3.7)$$

$$b) \quad \sup_{\lambda} \inf_{u,v} \mathcal{L}(u, v, \lambda) \leq \inf_U \varphi(u) \quad (3.8)$$

c) Le principe de coordination par découplage est applicable à un tel problème

DEMONSTRATION :

a) Posons $\Omega = \{(u, v) : v = K(u)\}$, il est clair que

$$\Omega \subset U \times V = \forall \lambda \in \Lambda : (\hat{u}, \hat{v}) \in U \times V \quad \mathcal{L}(u, v, \lambda) \leq (\hat{u}, \hat{v}) \in \Omega \quad \mathcal{L}(u, v, \lambda)$$

Mais, d'après (3.5), sur Ω , $\mathcal{L}(u, v, \lambda)$ vaut $g(u)$, d'où (3.7).

- b) C'est une conséquence de (3.7).
- c) Supposons que pour un certain λ^* , le minimum de \mathcal{L} en (u, v) soit atteint en \hat{u}, \hat{v} et que $\hat{v} = K(\hat{u})$ (Hypothèse de la définition 2.2).

Alors : $\mathcal{L}(\hat{u}, \hat{v}, \lambda^*) = g(\hat{u})$ d'après (3.5) et, d'après (3.7) $g(\hat{u}) \leq \inf g(u)$. Alors : $\hat{u} = u^*$, argument du minimum de g c. q. f. d. ■

THEOREME 3.2 :

- a) Avec les hypothèses du théorème 3.1, une condition nécessaire pour que le problème hiérarchisé soit coordonnable par découplage est que les bornes inférieure et supérieure de l'inégalité (3.8) soient atteintes et que cette inégalité soit une égalité, c'est-à-dire que :

$$\max_{\lambda} \min_{u, v} \mathcal{L}(u, v, \lambda) = \min_u g(u) \quad (3.9)$$

- b) Ces conditions sont suffisantes si Ψ est strictement croissante par rapport à chacun de ses arguments.
- c) Si de plus

$$\forall u, v : g(u) \leq \sup_{\lambda} \mathcal{L}(u, v, \lambda) \quad (3.10)$$

alors l'existence d'un point-selle par rapport à (u, v) d'une part, λ d'autre part, est une condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit coordonnable par découplage :

$$\begin{aligned} \text{CNS : } \exists u^*, v^*, \lambda^* : \forall u, v, \lambda, \mathcal{L}(u^*, v^*, \lambda) &\leq \mathcal{L}(u^*, v^*, \lambda^*) \\ &\leq \mathcal{L}(u, v, \lambda^*) \end{aligned} \quad (3.11)$$

DEMONSTRATION :

- a) On suppose que le problème global à une solution u^* (borne inférieure de \mathcal{P} atteinte) et qu'il est coordonnable par découplage, c'est-à-dire que les problèmes locaux ont une solution \hat{u}, \hat{v} (borne inférieure de \mathcal{L} atteinte) pour un certain λ^* , telle que $\hat{v} = K(\hat{u})$. Alors, par applicabilité (théorème 3.1), $\hat{u} = u^*$ et l'on a :

$$\mathcal{L}(\hat{u}, \hat{v}, \lambda^*) = \mathcal{L}(\hat{u}, K(\hat{u}), \lambda^*) = \mathcal{P}(\hat{u}) = \mathcal{P}(u^*).$$

Ceci prouve avec l'inégalité (3.8) que la borne supérieure en λ est atteinte en λ^* , ce qui donne l'égalité (3.9).

- b) Inversement, supposons (3.9) vérifiée, avec pour arguments des min. et max. respectivement u^* (solution globale) à droite de l'égalité, et $(\hat{u}, \hat{v}, \lambda^*)$ à gauche (\hat{u}, \hat{v} étant la solution locale correspondante à λ^*).

Montrons que le couple $(u^*, K(u^*))$ est une solution locale possible lorsque $\lambda = \lambda^*$, ce qui montrera la coordonnabilité. En effet, si tel n'était pas le cas, il existerait au moins un i tel que :

$$\bar{v}_i(\hat{u}_i, \hat{v}_i, \lambda^*) < \bar{v}_i(u_i^*, K_i(u_i^*), \lambda^*)$$

mais Ψ étant strictement croissante, cela impliquerait :

$$\mathcal{L}(\hat{u}, \hat{v}, \lambda^*) < \mathcal{L}(u^*, K(u^*), \lambda^*) = \mathcal{P}(u^*)$$

contredisant (3.9). c. q. f. d.

c) Il suffit maintenant de montrer que :

$$\min_u \mathcal{J}(u) = \min_{u,v} \max_{\lambda} \mathcal{L}(u, v, \lambda) \quad (3.12)$$

pour obtenir, par combinaison avec (3.9), l'égalité du min-max et du max-min, d'où l'équivalence bien connue avec le point-selle (3.11). Pour cela, on utilise l'hypothèse (3.10), qui donne :

$$\inf_u \mathcal{J}(u) \leq \inf_{u,v} \sup_{\lambda} \mathcal{L}(u, v, \lambda) \quad (3.13)$$

Mais :

$$\forall (u,v) \in \Omega, \forall \lambda : \mathcal{J}(u) = \mathcal{L}(u, v, \lambda)$$

$$\text{d'où : } \inf_{u \in U} \mathcal{J}(u) = \inf_{(u,v) \in \Omega} \sup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{L}(u,v,\lambda)$$

et comme $\Omega \subset U \times V$,

$$\inf_{u \in U} \mathcal{J}(u) \geq \inf_{(u,v) \in U \times V} \sup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{L}(u,v,\lambda)$$

ce qui est l'inégalité contraire de (3.13), d'où l'égalité. On voit facilement que les bornes sont atteintes pour l'inf-sup en $(u^*, K(u^*), \lambda^*)$ donc c'est un min-max. Ceci achève la démonstration ■

On notera que l'hypothèse (3.10) est trivialement vérifiée dans le cas cité au début du paragraphe (voir (3.3)).

En effet dans ce cas :

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda} \mathcal{L}(u,v,\lambda) &= +\infty && \text{si } v \neq K(u) \\ &= \mathcal{J}(u) && \text{si } v = K(u) \quad (\text{d'après (3.1)}). \end{aligned}$$

Le théorème 3.2 établit donc que, sous de faibles hypothèses, la coordonnabilité par découplage est équivalente à l'existence d'un point-selle de la fonction objective apparente. Il en résulte qu'un algorithme coordonnateur tout naturel est l'algorithme

d'UZAWA pour la recherche d'un point-selle qui consiste à minimiser en (u, v) (tâche décomposable en sous-problèmes) pour λ fixé et à maximiser en λ la fonctionnelle :

$$\mathfrak{J}(\lambda) = \min_{u,v} \mathcal{L}(u, v, \lambda) = \mathcal{L}(\hat{u}(\lambda), \hat{v}(\lambda), \lambda).$$

Alors, avec des hypothèses de différentiabilité, et en notant, ∇_x le gradient par rapport à x , et par une étoile l'opérateur adjoint :

$$\begin{aligned} \nabla \mathfrak{J}(\lambda) = & \left[\frac{d\hat{u}(\lambda)}{d\lambda} \right]^* \nabla_u \mathcal{L}(\hat{u}, \hat{v}, \lambda) + \left[\frac{d\hat{v}(\lambda)}{d\lambda} \right]^* \nabla_v \mathcal{L}(\hat{u}, \hat{v}, \lambda) \\ & + \nabla_\lambda \mathcal{L}(\hat{u}, \hat{v}, \lambda) \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont nuls, par stationnarité de \mathcal{L} en (\hat{u}, \hat{v}) , de sorte, que :

$$\nabla \mathfrak{J} = \nabla_\lambda \mathcal{L} = K(\hat{u}) - \hat{v} \quad (\text{d'après (3.3)})$$

Un algorithme de gradient simple consisterait, au pas $k+1$ de coordination, à changer λ^k en λ^{k+1} par :

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \epsilon^k (K(\hat{u}^k) - \hat{v}^k), \quad \epsilon^k \in \mathbb{R}^+ \quad (3.14)$$

On voit donc le rôle joué ici par l'écart de couplage dans l'algorithme coordonnateur.

4. Coordination par prédiction - Comparaison des deux principes de coordination.

Abordons maintenant le problème de la coordination par prédiction pour un problème décentralisé muni d'une fonction objective apparente croissante.

THEOREME 3.3 : Avec les hypothèses du théorème 3.3, en y remplaçant (3.10) par :

$$v \neq K(u) \Rightarrow \sup_{\lambda} \mathcal{L}(u, v, \lambda) = +\infty \quad (4.1)$$

si \mathcal{L} admet un point-selle (3.11), alors :

- a) $v^* = K(u^*)$
- b) u^* est solution du problème global $\min_u \mathcal{J}(u)$
- c) u^* est solution du problème local correspondant à la prédiction $\alpha = v^*$ et $\lambda = \lambda^*$

DEMONSTRATION :

- a) Considérons l'inégalité de gauche dans (3.11) et prenons le sup. en λ . Si $v^* \neq K(u^*)$, l'hypothèse (4.1) contredit cette inégalité. Donc $v^* = K(u^*)$, et la valeur commune des deux membres de l'inégalité est $\mathcal{J}(u^*)$ d'après (3.5).
- b) Considérons l'inégalité de droite dans (3.11) et prenons dans le membre de droite, $v = K(u)$ pour tout u . Alors (d'après (3.5)).

$$\forall u : \mathcal{J}(u^*) \leq \mathcal{J}(u)$$

donc u^* est solution du problème global

- c) La même inégalité, avec $v = v^*$ et $\lambda = \lambda^*$ dans le membre de droite montre que u^* est solution des problèmes locaux définis par prédiction. (On utilise ici l'hypothèse de stricte croissance de Ψ).■

Ce théorème exprime que l'existence d'un point selle de \mathcal{L} est une condition suffisante de coordonnabilité du problème décentralisé par prédiction. Encore s'agit-il d'un type particulier de coordonnabilité, car on ne peut démontrer indépendamment l'applicabilité ($\alpha = K(\hat{u}) = \hat{u} = u^*$) comme on a pu le faire au théorème 3.1 pour le découplage. Ceci provient de l'absence

de minimisation en v au niveau local. Un corollaire des théorèmes 3.2 et 3.3 établit la comparaison annoncée.

COROLLAIRE : Dans la classe des problèmes décentralisés munis d'une fonction objective apparente, la sous-classe des problèmes coordonnables par prédiction est plus large que celle des problèmes coordonnables par découplage.

Ce corollaire souligne simplement le fait que l'existence d'un point-selle est nécessaire et suffisante pour la coordonnabilité par découplage, mais seulement suffisante pour la coordonnabilité par prédiction. Cependant, sous une hypothèse de régularité, et des hypothèses de différentiabilité, une condition nécessaire de coordonnabilité par prédiction est l'existence d'un quasi-point-selle de \mathcal{L} (notion introduite par BENSOUSSAN et al. [4])

DEFINITION 4.1 : On dit qu'une fonctionnelle f de deux variables x et y admet un quasi-point-selle en (x^*, y^*) si les fonctionnelles :

$$x \rightarrow f(x, y^*)$$

$$\text{et } y \rightarrow f(x^*, y)$$

sont différentiables et stationnaires en x^* et y^* respectivement

THEOREME 4.1 : Etant donné un problème décentralisé muni d'une fonction objective apparente croissante, coordonnable par prédiction en ce sens qu'il existe des paramètres (α^*, λ^*) tels que la solution locale $\hat{u}(\alpha^*, \lambda^*)$ est égale à la solution globale u^* et que $\alpha^* = K(u^*)$, sous les hypothèses que \mathcal{L} (resp. K) est différentiable en (u, v) (resp. u) et que l'opérateur linéaire $dK/du(u^*)$ est injectif, la fonctionnelle \mathcal{L} admet un quasi-point-selle en $(u^*, \alpha^*, \lambda^*)$.

DEMONSTRATION :

D'après (3.5), la fonctionnelle $\lambda \rightarrow \mathcal{L}(u^*, \alpha^*, \lambda)$ est constante puisqu'égal à $\mathcal{J}(u^*)$. Elle est donc différentiable en λ et stationnaire partout donc aussi en λ^* . D'autre part, d'après l'hypothèse que u^* est la solution locale pour la prédiction (α^*, λ^*) :

$$\mathcal{L}(u^*, \alpha^*, \lambda^*) \leq \mathcal{L}(u, \alpha^*, \lambda^*), \quad \forall u$$

$$\text{et par conséquent : } \nabla_u \mathcal{L}(u^*, \alpha^*, \lambda^*) = 0 \quad (4.2)$$

Enfin, du fait, que u^* est solution globale et que $\mathcal{J}(u) = \mathcal{L}(u, K(u), \lambda)$ pour tout λ , on a :

$$\nabla \mathcal{J}(u^*) = \nabla_u \mathcal{L}(u^*, \alpha^*, \lambda^*) + \left(\frac{dK}{du}(u^*) \right)^* \nabla_v \mathcal{L}(u^*, \alpha^*, \lambda^*) = 0$$

Mais par (4.2) et l'hypothèse de régularité de $dK/du(u^*)$, on en déduit : $\nabla_v \mathcal{L}(u^*, \alpha^*, \lambda^*) = 0$ ce qui achève la démonstration. ■

Il est facile de montrer que ce quasi-point-selle peut ne pas être un point-selle, simplement en s'arrangeant pour construire un contre-exemple où \mathcal{L} n'est pas convexe en v . (cf.[6]). On verra d'ailleurs au chapitre 2 que cela peut très bien se produire dans le cas d'un problème de commande optimale linéaire-quadratique.

On peut se demander alors s'il ne s'agit pas plutôt d'un point-selle en u d'une part, (v, λ) d'autre part :

$$\mathcal{L}(u^*, v, \lambda) \leq \mathcal{L}(u^*, v^*, \lambda^*) \leq \mathcal{L}(u, v^*, \lambda^*).$$

Mais, avec l'hypothèse (4.1) généralement vérifiée, l'inégalité de gauche est impossible car pour $v \neq K(u^*)$ et en prenant le sup. en λ on trouve une contradiction.

Il est donc exclu de pouvoir construire un algorithme coordonnateur de type UZAWA. Il faut alors se tourner vers un autre type d'algorithme, dit "algorithme de réinjection". Etant donné que deux paramètres (α, λ) doivent être réajustés à chaque pas, deux relations sont nécessaires. La première sera naturellement fournie par la condition de couplage : $\alpha = K(u)$. Soit \hat{u}^k la solution locale au pas k , on prendra :

$$\alpha^{k+1} = K(\hat{\alpha}^k) \quad (4.3)$$

La deuxième relation sera obtenue par le résultat important du théorème 4.1, à savoir : $\nabla_v \mathcal{L} = 0$. Supposons par exemple que \mathcal{L} est du type (3.3).

Alors :

$$\nabla_v \mathcal{L} = \nabla_v J - \lambda.$$

ce qui suggère d'ajuster λ par :

$$\lambda^{k+1} = \nabla_v J(\hat{\alpha}^k, K(\hat{\alpha}^k)) \quad (4.4)$$

On étudiera au chapitre 3 la convergence de l'algorithme (4.3) - (4.4) obtenu d'ailleurs, à ce moment là, par une autre approche (opérateur d'interaction de MESAROVIC et al.)

Remarquons pour finir une sorte de dualité entre la cooptimisation par prédiction et celle par découplage : en effet dans la première la relation de couplage sert à ajuster le paramètre d'interaction λ et la stationnarité en v de \mathcal{L} sert à ajuster le paramètre \hat{v} ; dans la seconde, le paramètre \hat{v} est choisi au niveau local en minimisant \mathcal{L} en v (stationnarité) alors que le paramètre λ est ajusté en se servant de la relation de couplage (cf. (3.14)).

ALGORITHME DE TAKAHARA ET EXTENSIONS

Avec ce chapitre commence l'application des concepts précédents à la commande optimale des systèmes dynamiques. Quelques algorithmes de décentralisation-coordination concernant ce domaine sont apparues dans la littérature, parmi lesquels nous citerons ceux de PEARSON [32], TITLI [38], TAMURA [37], BAUMAN [3] et TAKAHARA [35]. Mis à part celui de BAUMAN dont l'idée de décomposition des trajectoires n'entre pas dans la catégorie d'applications que nous visons, les autres se classent plus ou moins en deux catégories : la coordination par prédiction ([35]) et celle par "découplage", c'est-à-dire par une généralisation de l'algorithme de LASDON et al. [28] au cas dynamique.

Cependant, cette dernière technique ne sera pas développée outre mesure ici. Les raisons tiennent en partie au fait que, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, il y a moins de problèmes coordonnables par découplage que par prédiction mais surtout au fait que ces méthodes "locales" s'adaptent beaucoup plus difficilement à une mise en oeuvre en ligne, et c'est vers cet objectif que nous tendons.

1. Une tentative de coordination par découplage de système dynamique.

Un exemple particulier des difficultés rencontrées par une tentative d'application d'une coordination par découplage est le suivant. Considérons le classique problème linéaire-quadratique :

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad ; \quad x(t_0) = \alpha \quad (1.1)$$

$$\min \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x' Q x + u' R u) dt \quad (1.2)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_0}$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$, P , Q , R étant de dimensions adéquates et pouvant dépendre du temps. L'accent sur un symbole mathématique représente la transposée du vecteur ou de la matrice.

Supposons qu'une certaine décomposition des vecteurs d'état et de commande en N sous-vecteurs de dimensions respectives $\{n_i$ et $m_i, i = 1, \dots, N\}$ soit : $n = \sum_{i=1}^N n_i = n, m = \sum_{i=1}^N m_i = m$.

Pour la matrice $G(n \times m)$, par analogie, nous noterons \hat{G} , la matrice formée des N blocs G_{ii} de dimension $(n_i \times m_i)$ correspondant à la décomposition précédente sur la diagonale et les zéros ailleurs. Nous noterons \tilde{G} la matrice $G - \hat{G}$ formée des blocs $G_{ij}(n_i \times m_j), i \neq j$. Nous appellerons \hat{G} et \tilde{G} respectivement, matrice "bloc-diagonale" et matrice "hors-diagonale".

Supposons pour simplifier que dans le problème précédent, les matrices Q et R soient bloc-diagonales de telle sorte que le critère soit "séparable". En éliminant la partie de dimension n_i des équations (1.1), on obtient :

$$\dot{x}_i = F_{ii}x_i + G_{ii}u_i + \sum_{j \neq i} (F_{ij}x_j - F_{ji}u_j) ; x_i(t_0) = x_{i0} \quad (1.3)$$

En posant :

$$v_i = \sum_{j \neq i} (F_{ij}x_j + G_{ij}u_j) \quad (1.4)$$

ou globalement :

$$\dot{x} = \hat{F}x + \hat{G}u + v \quad (1.5)$$

on a défini l'interaction $v(t) \in \mathbb{R}^n$ et la fonction de couplage $v = H(u, x)$ (cf.(1.1.8)). Le processus "découplé" \bar{p} (cf.(1.1.5)) s'écrit ici :

$$\dot{x} = \hat{F}x + \hat{G}u + v ; x(t_0) = x_0 \quad (1.6)$$

Le problème est alors, dans le cas dynamique, un problème du type "séparable" (cf. (1.3.1)-(1.3.2)). On forme donc le lagrangien (cf. (1.3.3)-(1.3.4)):

$$\int_{t_0}^T \left[\frac{1}{2} x' Q x + \frac{1}{2} u' R u + \lambda' (\dot{x} + \tilde{G}u - v) \right] dt \quad (1.7)$$

où $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$. On peut alors chercher à appliquer un algorithme d'UZAWA, en minimisant, pour $\{\lambda(t), t \in [t_0, T]\}$ donné, en u et v le lagrangien (1.7) et en maximisant en λ au deuxième niveau. Cependant v n'apparaît que linéairement dans (1.7) et (1.6). On est donc confronté à un problème avec arc singulier, dont la difficulté technique est bien connue.

Mais cette difficulté n'est en fait pas seulement technique. C'est le problème de la coordonnabilité par découplage qui est posé. On a vu (théorème 1-3-2) que la coordonnabilité était équivalente à l'existence d'un point-selle. Il est facile de voir qu'une condition nécessaire d'existence est la convexité en v qui requiert :

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} L(u, v, \lambda) > 0.$$

Pour calculer cette quantité nous introduisons l'opérateur linéaire Φ dans l'espace des fonctions du temps à valeurs dans \mathbb{R}^n , de carré intégrable sur $[t_0, T] : L^2([t_0, T], \mathbb{R}^n)$, défini comme suit : Soit $\Phi(t, s)$ la matrice de transition du système linéaire (1.1) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, s) = F(t)\Phi(t, s) \quad ; \quad \Phi(s, s) = I \text{ (identité)} \quad (1.8)$$

DEFINITION 1.1 : On appelle opérateur Φ associé à F l'opérateur linéaire qui à $a(\cdot) \in L^2([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ associe $b(\cdot)$ telle que :

$$b(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t,s)a(s)ds \quad ; \quad t \in [t_0, T]. \quad (1.9)$$

Soit $\hat{\Phi}$ associé à \hat{F} ; il est facile de montrer que la dérivée seconde en v de (1.7) où x est considéré comme fonction de (u,v) par (1.6) est égale à :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial v^2} = \hat{\Phi}^* Q \hat{\Phi} \quad (1.10)$$

où $\hat{\Phi}^*$ est l'adjoint de $\hat{\Phi}$ par rapport au produit scalaire dans L^2 . On voit donc que la positivité de cette quantité est liée à celle de Q , qui n'est absolument pas nécessaire pour que le problème linéaire-quadratique ait une solution. De plus la positivité stricte est rarement acquise et est pourtant nécessaire pour que la minimisation en v reste finie.

On peut essayer d'adapter cette méthode en introduisant v sous forme quadratique explicite dans le critère, par une modification quadratique du type de celle utilisée au chapitre 3, mais on doit alors faire intervenir une trajectoire nominale de sorte que l'on revienne à des méthodes de type "prédiction". Il nous paraît donc plus direct de s'orienter à priori vers ce type de méthode. L'algorithme de TAKAHARA en fût, historiquement, le premier exemple.

2. Algorithme de TAKAHARA et généralisation.

La façon dont TAKAHARA a obtenu son algorithme en 1964 semble avoir peu de rapport avec la remarque suggérée par MESAROVIC et al.[30] pour les systèmes dynamiques. Cependant, nous montrerons au chapitre 3 le lien qui peut être fait entre ces travaux. Ici nous nous contenterons d'exposer l'algorithme et de le généraliser.

Considérant le problème (1.1) - (1.2), on pose les équations d'Euler-Lagrange, obtenues à partir du principe du minimum de Pontryaguine (cf. Annexe 4) :

$$\dot{x} = Fx - GR^{-1}G'\lambda \quad ; \quad x(t_0) = \alpha \quad (2.1)$$

$$\dot{\lambda} = -P' \lambda - Qx \quad ; \quad \lambda(T) = 0 \quad (2.2)$$

$$u = -R^{-1}G' \lambda \quad (2.3)$$

TAKAHARA suppose les matrices G et R bloc-diagonales. Alors, choisissant une trajectoire nominale de l'état et de l'adjoint ($x^k(\cdot)$, $\lambda^k(\cdot)$), on considère les N problèmes aux limites en deux points indépendants :

$$\dot{x}^{k+1} = \hat{F}x^{k+1} - GR^{-1}G'\lambda^{k+1} - \hat{F}x^k \quad ; \quad x^{k+1}(t_0) = \alpha \quad (2.4)$$

$$\dot{\lambda}^{k+1} = -\hat{F}'\lambda^{k+1} - \hat{Q}x^{k+1} - \hat{F}'\lambda^k - \hat{Q}x^k \quad ; \quad \lambda^{k+1}(T) = 0 \quad (2.5)$$

Autrement dit dans la partie 1 des équations (2.1) - (2.2), les variables $\{x_j, \lambda_j, j \neq 1\}$ sont prédites à des valeurs nominales afin de rendre ce sous-système d'équations indépendante des autres.

On peut lever facilement l'hypothèse restrictive "G et R bloc-diagonales" faite par TAKAHARA en raison de la présence de coefficients non-linéaires par rapport à ces matrices dans les équations (2.1) à (2.3). Il suffit, pour cela, de faire disparaître ces non linéarités :

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad ; \quad x(t_0) = \alpha \quad (2.6)$$

$$\dot{\lambda} = -P' \lambda - Qx \quad ; \quad \lambda(T) = 0 \quad (2.7)$$

$$Ru = -G' \lambda \quad (2.8)$$

et d'appliquer le procédé de TAKAHARA, ce qui donne :

$$\dot{x}^{k+1} = \hat{F}x^{k+1} + \hat{G}u^{k+1} + \hat{F}x^k + \hat{G}u^k \quad ; \quad x^{k+1}(t_0) = \alpha \quad (2.9)$$

$$\dot{\lambda}^{k+1} = -\hat{F}'\lambda^{k+1} - \hat{Q}x^{k+1} - \hat{F}'\lambda^k - \hat{Q}x^k \quad ; \quad \lambda^{k+1}(T) = 0 \quad (2.10)$$

$$u^{k+1} = -\hat{R}^{-1}[\hat{G}'\lambda^{k+1} + \hat{G}'\lambda^k + \hat{R}u^k] \quad (2.11)$$

Ces équations peuvent s'interpréter comme les équations d'Euler-Lagrange des N problèmes indépendants suivants :

$$\dot{x} = \hat{F}x + \hat{G}u + v^k \quad ; \quad x(t_0) = \alpha \quad (2.12)$$

$$v^k = \hat{F}x^k + \hat{G}u^k \quad (2.13)$$

$$\min \int_{t_0}^T \left[\frac{1}{2} x' \hat{Q} x + \frac{1}{2} u' \hat{R} u + q^{k'} x + r^{k'} u \right] dt \quad (2.14)$$

$$q^k = \hat{F}' \lambda^k + \hat{Q} x^k ; \quad r^k = \hat{G}' \lambda^k + \hat{R} u^k \quad (2.15)$$

Les questions d'applicabilité et de coordonnabilité de cette méthode de cocoréaction sont faciles à étudier directement à partir des équations (2.1) à (2.3) et (2.9) à (2.11) moyennant des hypothèses d'existence et d'unicité. On peut donc s'attendre, si l'algorithme converge, à une convergence (en un sens qui reste à définir) de (x^k, λ^k, u^k) vers les valeurs optimales (x^*, λ^*, u^*) . Cependant, il semble qu'aucune preuve correcte de convergence n'ait été obtenue pour l'algorithme de TAKAHARA. Des expériences numériques (cf. [18]) ont montré un bon comportement pour des sous-problèmes moyennement couplés.

L'interprétation (2.12) à (2.15) permettra de faire le lien entre cet algorithme et celui du chapitre 3. De plus dans le paragraphe qui suit, elle suggérera une version plus commode débouchant sur une mise en oeuvre heuristique en ligne.

3. Une version plus commode et un algorithme en ligne heuristique.

Puisque la résolution des équations (2.9) à (2.11) est équivalente à la résolution du problème (2.12) à (2.15), tout autre façon de résoudre ce dernier conduira à une nouvelle version de l'algorithme de TAKAHARA. En particulier, dans le cas linéaire quadratique, une résolution par la programmation dynamique, conduisant ici à une équation de Riccati et deux équations linéaires par sous-problèmes (cf. Annexe 4) est recommandée puisqu'elle supprime le problème aux limites en deux

points des équations d'Euler-Lagrange. De plus, on s'apercevra que les équations de Riccati peuvent être intégrées une fois pour toutes, au départ de l'algorithme, ce qui réduit la résolution des sous-problèmes en cours d'algorithme à des calculs linéaires. La version ci-dessous peut-être également obtenue directement à partir des équations (2.9) à (2.11) en utilisant la méthode des caractéristiques (poser : $\lambda = Px + g$). Il vient :

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= (\hat{P} - \hat{G}\hat{R}^{-1}\hat{G}'P)x^{k+1} - \hat{G}\hat{R}^{-1}(\hat{G}'g^{k+1} + r^k) + v^k ; \\ x^{k+1}(t_0) &= \alpha \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} g^{k+1} + (\hat{P}' - P\hat{G}\hat{R}^{-1}\hat{G}')g^{k+1} - P\hat{G}\hat{R}^{-1}r^k + Pv^k + q^k &= 0 ; \\ g^{k+1}(T) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\hat{P} + P\hat{P} + \hat{P}'P + \hat{Q} - P\hat{G}\hat{R}^{-1}\hat{G}'P = 0 \quad ; \quad P(T) = 0 \quad (3.3)$$

$$u^{k+1} = -\hat{R}^{-1}(\hat{G}'Px^{k+1} + \hat{G}'g^{k+1} + r^k) \quad (3.4)$$

Notons ici que si la convergence a lieu, les éléments $(x^k, u^k, Px^k + g^k)$ considérés comme fonctions du temps convergent vers les éléments optimaux (x^*, u^*, λ^*) mais les éléments P et g^k n'ont pas pour limite leurs équivalents dans le problème global. Ceci tient à la contrainte de structure imposée par l'approche décentralisée, qui implique que le gain de la partie en boucle fermée de la commande (3.4) (et donc P) ne peut-être que bloc-diagonal, ce qui n'est pas vrai généralement pour le problème global. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette question. L'étude de la convergence l'algorithme du type de celui de TAKAHARA a été abordée dans [15a].

L'équation (3.1) signifie que la commande (3.4), obtenue comme solution des N problèmes (2.12) à (2.15), est appliquée à la dynamique locale (2.12), pour donner les trajectoires $x^{k+1}(\cdot)$ et $u^{k+1}(\cdot)$. De plus, les équations (2.13) et (2.15) montrent que ces valeurs sont réinjectées comme nouvelles prédictions.

On peut imaginer d'appliquer la commande :

$$u = -\hat{R}^{-1}(\hat{G}'_1 x + \hat{G}'_2 x^{k+1} + r^k) ,$$

considérée comme une commande localement en boucle fermée, directement sur la dynamique globale (1.1) ou sur le système réel. Bien sûr, on obtiendra alors des trajectoires pour x et u différentes des précédentes. Ces nouvelles trajectoires peuvent alors être utilisées comme prédictions dans les équations (2.13) et (2.15).

Cette nouvelle version évite l'intégration de l'équation (3.1) dans chaque sous-problème, à chaque pas, celle-ci étant remplacé par le déroulement du processus global (1.1). De plus, on obtient alors une sorte de feedback au niveau coordonnateur puisque c'est la réponse du système réel qui est utilisée comme nouvelle prédiction. Cependant cette version heuristique en ligne, testée numériquement, n'a pas donné satisfaction dès que le couplage prend une certaine importance (cf.[18]). En particulier, une certaine instabilité des trajectoires dans le temps apparaît.

Nous ne discuterons pas plus longtemps sur les raisons de cet échec, constatant simplement que le problème essentiel de la coordination en ligne vient du fait que la commande à chaque pas est calculée sur les modèles locaux découplés alors qu'elle doit être mise en oeuvre sur le système réel couplé. La nécessité d'une approche plus théorique apparaît donc, ce qui est fait au chapitre suivant.

PREDICTION ET OPERATEUR D'INTERACTION

THEORIE ET ALGORITHME

Ce chapitre contient la contribution théorique majeure de ce travail. Partant des idées de MESAROVIC et al. qui seront rendues transparentes par une présentation simple, on développe ces idées dans un contexte général, ce qui conduit à un algorithme de coordination dont la convergence forte est démontrée dans le cas quadratique.

On spécialise ensuite les résultats obtenus, dans un premier temps, pour le problème de commande optimale linéaire-quadratique le plus simple. Au chapitre suivant, on envisagera des problèmes linéaires-quadratiques plus complets, puis non linéaires. On verra aussi la version de l'algorithme dans le cas linéaire-quadratique (pour simplifier) à temps discret. En fait, la portée de la théorie précédente semble encore plus générale et il est raisonnable de penser qu'elle pourrait déboucher sur des algorithmes de coordination de problèmes à paramètres répartis (dérivées partielles).

Pour terminer ce chapitre, on fera le lien de l'algorithme obtenu dans le cas linéaire-quadratique avec l'algorithme de TAKAHARA du chapitre précédent. On pourra alors mieux cerner la notion de coordination en ligne. L'essentiel des résultats de ce chapitre et des § IV.4.1 et IV.4.4 ci-dessous ont déjà paru dans l'article [15].

1. Coordination par prédictif et opérateur d'interaction.

Commençons par définir quelques notations et par faire quelques hypothèses. Considérant le formalisme du §I.1, nous

supposons que les espaces $u, v \dots$ sont des espaces de Hilbert et nous noterons pour tous ces espaces le produit scalaire par $\langle \dots \rangle$. Rappelons que pour une fonctionnelle $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, la dérivée de Fréchet évaluée en x^0 , $df/dx(x^0)$ est un élément du dual \mathcal{X}^* dont l'équivalent dans le primal par le théorème de représentation de Riesz (isomorphisme de \mathcal{X} et \mathcal{X}^*) sera noté $\nabla_x f(x^0)$ et appelé "gradient". De plus l'opérateur adjoint d'un opérateur linéaire entre deux espaces est noté par une $*$.

Dans ce paragraphe comme dans le suivant, nous ne ferons plus référence aux variables d'état qui sont des intermédiaires inutiles pour ce qui suit. C'est pourquoi nous définissons $g(u)$ par (I.1.3) et :

$$\forall u, v : j(u, v) = q(u, \bar{p}(u, v)) \quad (1.2)$$

Nous supposons g, j et K Fréchet-différentiable par rapport à tous leurs arguments. Nous supposons enfin données des dérivations de u et v . On ne distingue pas dans les notations l'élément $u_i \in u_i$ de l'élément $(0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0) \in u$ afin de ne pas compliquer l'écriture.

Soit u^* une solution au problème global : minimiser g . Elle vérifie la condition nécessaire :

$$\frac{dg(u^*)}{du} = 0 \quad (1.3)$$

Grâce à l'identité (I.1.7), on a :

$$\forall u : j(u, K(u)) = g(u), \quad (1.4)$$

de sorte que (1.3) peut-être réécrite :

$$\frac{\partial j}{\partial u_i}(u^*, K(u^*)) + \frac{\partial j}{\partial v}(u^*, K(u^*)) \cdot \frac{\partial K}{\partial u_i}(u^*) = 0, \quad i=1, \dots, K(u^*)$$

On va chercher à interpréter ces équations comme des

conditions nécessaires d'optimalité selon N critères locaux J_1 à définir. Pour cela, on pose :

$$J_1^0(u_1) = J(u_1 + u^0 - u_1^0, v^0) + \langle \Gamma_1(u^0), u_1 \rangle \quad (1.5)$$

$$v^0 = K(u^0) \quad (1.6)$$

$$\Gamma_1(u^0) = \left[\frac{\partial K}{\partial u_1}(u^0) \right]^* \nabla_v J(u^0, v^0) \quad (1.7)$$

où u^0 est une commande nominale (prédiction).

Il est aisé de constater alors que les équations (1.4) peuvent être réécrites :

$$\frac{d\bar{u}_i^*}{du_i}(u_i^*) = 0, \quad i=1, \dots, N \quad (1.8)$$

ce qui s'interprète comme les conditions nécessaires de minimisation des N critères J_1^* . L'étude de cette méthode de coordination est résumée par le lemme et le théorème ci-dessous. Donnons au préalable quelques éléments de vocabulaire. La façon dont le premier terme dans le second membre de (1.5) est obtenu à partir de $J(u, v)$ est dite par "restriction autour de u^0 ". Elle consiste à figer v et la partie non locale de u $\{u_j, j \neq i\}$ à une valeur nominale. Le vecteur $\Gamma_1(u^0) \in u_1$ est l'équivalent dans le primal du premier opérateur d'interaction de MESSAROVIC et al. [30, pp.192-194]. Ceux-ci ont également défini un deuxième opérateur intervenant dans la coordination par découplage (cf. aussi [7, Chap 5]); Nous n'en parlerons pas ici puisque nous nous limitons à la prédiction, et d'ailleurs l'utilisation d'une coordination par découplage et opérateurs d'interaction n'a pas les avantages de la prédiction tout en étant fortement tentée (nécessité de choisir une nominale).

LEMME 1.1 : Le critère J_1^0 étant défini par les relations (1.5) à (1.7), on a :

$$\frac{dj_i^0(u_i^0)}{du_i} = \frac{\partial J}{\partial u_i}(u^0) \quad (1.9)$$

Démonstration évidente à partir de (1.3).

THEOREME 1.1 : Supposons la fonctionnelle J convexe en u et la fonction de couplage K injective ⁽¹⁾.

- a) Le principe de coordination par prédiction est applicable au problème décentralisé défini par la famille de critères J_i .
 b) Si le problème global a une solution u^* , et si les J_i sont convexes en u_i , le problème décentralisé est coordonnable par ce principe.

DEMONSTRATION :

a) Supposons que pour une prédiction $\{\alpha = v^0 = K(u^0)\}$, la solution \hat{u} des problèmes locaux, supposée exister, soit telle que $\alpha = K(\hat{u})$. Alors, par injectivité de K , $u^0 = \hat{u}$. D'après les conditions de stationnarité :

$$\frac{dj_i^0(\hat{u}_i)}{du_i} = 0 \quad , \quad i=1, \dots, N \quad (1.10)$$

et d'après (1.9), on en déduit :

$$\frac{\partial J}{\partial u_i}(\hat{u}) = 0 \quad , \quad i=1, \dots, N \quad (1.11)$$

ce qui exprime, avec l'hypothèse de convexité, que \hat{u} est solution du problème global. C'est l'applicabilité.

(1) Cette hypothèse d'injectivité est nécessaire si on veut rester fidèle à la définition de l'applicabilité telle qu'elle est exprimée au §1.2. Si l'on modifie cette définition en considérant directement u^0 comme la prédiction :

$$u^0 = \hat{u} = \hat{u} = u^*$$

Cette hypothèse n'est plus utile comme on peut le voir dans la démonstration.

b) Soit u^* une solution du problème global. Elle vérifie (1.2) et (1.4). Cette dernière équation et l'hypothèse de convexité des J_i impliquent que u_i^* est solution du problème local i avec pour prédiction u_i^* . Par conséquent il existe bien une prédiction $\{u^*, v^* = K(u^*)\}$ conduisant à l'optimum global par optimisation locale. C'est la coordonnabilité ■

Ces deux points étant acquis, on aborde maintenant le problème de l'algorithme coordonnateur.

2. Algorithme de réinjection. Convergence dans le cas quadratique :

Nous nous limiterons ici à l'étude du cas quadratique défini par les hypothèses suivantes :

H1) J est une fonctionnelle quadratique en u

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle u - u^*, A(u - u^*) \rangle \quad (2)$$

H2) J est une fonctionnelle quadratique en u et v .

H3) K est une fonction affine de u :

$$K(u) = \frac{dK}{du} \cdot u + K(0) \quad (3)$$

Ces hypothèses sont compatibles avec la relation (1.3). La raison de cette limitation est d'ordre technique : toute fonction quadratique est représentable exactement par son développement de Taylor au second ordre. Une conséquence que le domaine de convergence sera indépendant du point de départ de l'algorithme. Dans le cas non quadratique, il faudrait reprendre les démonstrations en majorant les termes d'ordre supérieur à l'ordre 2. Alors, on ne pourrait assurer la convergence que dans un certain voisinage de l'optimum, voisinage qui serait probablement difficile à définir de façon pratique.

On va d'abord démontrer, moyennant une certaine condition de convergence que partant d'une prédiction u^0 et appliquant une fois le principe de coordination, la solution locale obtenue \hat{u} est améliorante c'est-à-dire que $J(\hat{u}) \leq J(u^0)$. Il est alors naturel de reprendre cette nouvelle commande comme

prédiction u^1 pour itérer le processus et obtenir u^2, u^3 , etc... On appelle cette procédure, algorithme de réinjection. On obtient donc une suite $\{u^k\}$ qui est telle que $\{J(u^k)\}$ est décroissante et minorée par $J(u^*)$. On démontre alors que la suite $\{u^k\}$ converge fortement vers u^* et que la limite est bien $J(u^*)$. On montrera ensuite comment modifier les critères J_1 afin de toujours satisfaire la condition de convergence. L'algorithme ci-dessus permet alors de coordonner (du moins théoriquement) n'importe quel problème décentralisé du type considéré.

LEMME 2.1 : Soit B_1 l'opérateur d^2J/du_1^2 et soit B l'opérateur bloc-diagonal formé avec les B_1 . En supposant B coercif donc inversible, on a :

$$\Omega = u^0 - B^{-1} \nabla J(u^0) \quad (2.3)$$

DEMONSTRATION :

Ecrivons (1.10) et développons autour de u_1^0 :

$$\nabla_{u_1} J_1^0(\Omega_1) = \nabla_{u_1} J_1^0(u_1^0) + B_1(\Omega_1 - u_1^0) = 0 \quad (2.4)$$

Mais d'après (1.9), le premier terme est égal à $\nabla_{u_1} J(u^0)$ et l'on obtient globalement (2.3) ■

Notons que l'hypothèse B_1 coercif garantit que le problème local i a une solution (unique). Or suppose de même $A = d^2J/du^2$ (cf.(2.1)) coercif, pour que le problème global ait une solution.

THEOREME 2.1 :

a) Sous l'hypothèse que l'opérateur autoadjoint $B-A/2$ est coercif, ce que nous noterons :

$$B - \frac{A}{2} > 0 \quad (2.5)$$

l'algorithme de réinjection provoque une décroissance strictement monotone du critère global J , et la différence entre deux valeurs successives est :

$$J(u^k) - J(u^{k+1}) = \langle u^k - u^*, C(u^k - u^*) \rangle \quad (2.6)$$

$$\text{avec } C = AB^{-1}(B-A/2)B^{-1}A \quad (2.7)$$

b) La suite $\{u^k\}$ converge fortement vers u^* , le rythme de convergence étant donné par (2.3).

DEMONSTRATION :

a) La décroissance monotone de J est une conséquence de l'hypothèse (2.5) et de la formule (2.6) - (2.7) qu'il suffit donc d'établir. La formule (2.3) s'écrit encore en remplaçant u^0 et \hat{u} par u^k et u^{k+1} , et en tenant compte de (2.1).

$$u^{k+1} = u^k - B^{-1}A(u^k - u^*) \quad (2.8)$$

Il suffit alors de développer la différence $J(u^{k+1}) - J(u^k)$ au second ordre ce qui conduit au résultat.

b) La suite $\{J(u^k)\}$ est donc décroissante et bornée inférieurement par $J(u^*)$. Elle a une limite $J_{\lim} \geq J(u^*)$ et par conséquent $J(u^k) - J(u^{k+1}) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Utilisant l'équation (2.6) et l'hypothèse de coercivité (2.5), on a :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : |J(u^k) - J(u^{k+1})| > \varepsilon \implies \|B^{-1}A(u^k - u^*)\|^2$$

Il en résulte que $\|B^{-1}A(u^k - u^*)\| \rightarrow 0$ et donc $\|u^k - u^*\| \rightarrow 0$ (inversibilité de B et A). La suite $\{u^k\}$ converge fortement vers u^* . Par continuité, $J_{\lim} = J(u^*)$. ■

REMARQUE 2.1 : On va montrer que l'algorithme ci-dessus est équivalent à celui qui avait été défini par les formules (I.4.3) et (I.4.4) comme conséquence du théorème I.4.1 appliqué au cas séparable (I.3.1) à (I.3.4). Pour cela, remarquons tout

d'abord que si l'on applique une procédure de "restriction" au critère additif :

$$J(u,v) = \sum_i J_i(u_i, v_i)$$

on trouve bien, à des constantes près, comme il se doit le terme $J_i(u_i, a_i)$ (avec $a_i = K_i(u^0)$) pour le sous-système i.

Si l'on fait la somme des N critères locaux (1.5), on peut écrire alors (au pas $k+1$) :

$$\sum_i J_i^k(u_i) = J(u, a^{k+1}) + \langle \lambda^{k+1}, \frac{dK}{du}(u^k) \cdot u \rangle \quad (2.1)$$

$$a^{k+1} = K(u^k) \quad (2.2)$$

$$\lambda^{k+1} = \nabla_{\lambda} L(u^k, K(u^k)) \quad (2.3)$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que le terme

$$\frac{dK}{du}(u^k) \cdot u$$

peut-être remplacé (même dans le cas où K n'est pas affine) par $K(u)$ (lorsque K est séparable, bien sûr pour que la décomposition soit possible, cf. (1.3.2) - (1.3.4)) sans changement pour les théorèmes d'appliquabilité et de géométrisabilité. Alors, à des constantes près (terme $\langle \lambda^k, a^{k+1} \rangle$), (2.3) ainsi modifié s'identifie à (1.3.3) et l'algorithme (2.10)-(2.11) est équivalent à (1.4.3)-(1.4.4).

Cependant l'avantage important de la démarche ci-dessus est de ne pas nécessiter d'hypothèse de séparabilité ni sur le critère ni sur la fonction de couplage K. La portée de l'algorithme est donc très générale.

REMARQUE 2.2 : La formule (2.3) permet de voir que le principe de l'algorithme ci-dessus est celui d'un "quasi-algorithme de Newton décentralisé". En effet, l'algorithme de Newton s'écrirait :

$$u^{k+1} = u^k - \lambda^{-1} \nabla g(u^k) \quad (2.12)$$

et convergerait d'ailleurs en un pas GRS le cas quadratique. Mais l'opération non linéaire d'inversion de $A = d^2g/du^2$ n'est pas possible de façon décentralisée. Aussi, lui substitue-t-on l'inversion de B, qui est bloc-diagonal (B est la partie bloc-diagonale de d^2J/du^2). La condition (2.5) montre dans quel cas cette substitution est loisible. Le lemme suivant lève cette restriction.

LEMME 2.2 : Si l'on ajoute le terme quadratique :

$$\frac{1}{2} \langle u_1 - u_1^0, M_1(u_1 - u_1^0) \rangle \quad (2.13)$$

à la définition (1.5) des critères locaux, le lemme et le théorème 1.1 restent vrais. Le lemme et le théorème 2.1 s'appliquent en substituant à B l'opérateur B+M où M est l'opérateur bloc-diagonal formé par les M_1 . Il est toujours possible de choisir M pour satisfaire la condition de convergence :

$$B + M - A/2 > 0. \quad (2.14)$$

La démonstration de ce lemme est très simple. Par contre un problème difficile est celui du choix du meilleur M pour obtenir la convergence la plus rapide qui est obtenue lorsque C est le plus positif possible (cf.(2.6)). On peut suggérer dans un premier temps de respecter la géométrie des problèmes locaux en prenant :

$$M = \gamma B, \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

L'opérateur C (cf.(2.7)) devient alors :

$$C_\gamma = \frac{1}{(\gamma+1)^2} AB^{-1}[(1+\gamma)B-A/2]B^{-1}A \quad (2.16)$$

où la présence de γ au dénominateur et au numérateur simultanément indique qu'un compromis doit être trouvé entre stabilité et rapidité de convergence.

3. Application à la commande optimale linéaire quadratique.

Considérons le problème (II.1.1)-(II.1.2) ainsi que la décomposition en sous-systèmes (II.1.3) à (II.1.6). Conformément à la théorie précédente, $J(u)$ est la valeur de l'intégrale (II.1.2) lorsque x est donné par (II.1.1) ; $J(u,v)$ est la valeur de la même intégrale lorsque x est donné par (II.1.6). Nous désignerons désormais par ξ_1 l'état du modèle local 1 et par ξ la concaténation des ξ_i , ceci afin de distinguer l'état du système global couplé ($x = p(u)$) défini par (II.1.1) et l'état du système découplé ($\xi = \bar{p}(u,v)$) défini par (II.1.6)).

La procédure par restriction appliquée à $J(u,v)$ autour de u^k donne, à des constantes près, pour le sous-système 1 :

$$\int_{t_0}^T \left[\frac{1}{2} (\xi_1' Q_{11} \xi_1 + u_1' R_{11} u_1) + \sum_{j \neq 1} (x_j' Q_{j1} \xi_1 + u_j' R_{j1} u_1) \right] dt \quad (3.1)$$

où $x^k = p(u^k)$. C'est le premier terme dans le second membre de (1.5). Il s'agit maintenant de calculer la modification linéaire due à l'opérateur d'interaction $\langle \Gamma_1(u^k), u_1 \rangle$ ou la somme $\langle \Gamma(u^k), u \rangle$ (deuxième terme de (1.5)).

LEMME 3.1 : La modification linéaire est égale à des constantes près à :

$$\int_{t_0}^T \lambda^{k'} (\dot{p}\xi + \tilde{G}u) dt \quad (3.2)$$

où $\lambda^k(\cdot)$ est donné par :

$$\dot{\lambda}^k = -F' \lambda^k - Q x^k \quad ; \quad \lambda^k(T) = 0 \quad (3.3)$$

et x^k est la solution de (II.1.1) pour $u = u^k$, ξ étant l'état du modèle local (3.13) ci-dessous.

DÉMONSTRATION :

D'après la formule (1.7), on a :

$$\Gamma(u^k) = [\frac{dK}{du}(u^k)]^* \nabla_v J(u^k, v^k) \quad (3.4)$$

En premier lieu, la fonction affine $v = K(u)$ est définie pour (II.1.5) où $x = p(u)$. Grâce à l'équation (II.1.1) et la définition (II.1.1) de l'opérateur Φ , il est facile de voir que :

$$\frac{dK}{du} = \hat{F} \Phi G + \tilde{G} \quad (3.5)$$

Et second lieu, la définition de $J(u, v)$ (cf. début du §) et l'équation (II.1.6) permettent de calculer :

$$\nabla_x J(u^k, v^k) = \hat{\Phi}^* Q \xi^k \text{ avec } \xi^k = \bar{p}(u^k, v^k) \quad (3.6)$$

Cependant, ici $v^k = K(u^k)$, de sorte que $\xi^k = x^k = p(u^k)$ d'après (I.1.7). D'où :

$$\nabla_v J(u^k, v^k) = \hat{\Phi}^* Q x^k \text{ avec } x^k = p(u^k) \quad (3.7)$$

Les équations (3.4)-(3.5)-(3.6) donnent alors

$$\Gamma(u^k) = (G' \Phi^* \hat{F} + \tilde{G}' \hat{\Phi}^* Q) x^k \quad (3.8)$$

Cette formule n'est pas opérationnelle et nous voudrions obtenir une expression en ξ et u du type (3.1). C'est pourquoi, nous sommes conduits à opérer encore quelques transformations sur (3.8). Considérons :

$$\langle \Gamma(u^k), u \rangle = \langle Q x^k, \hat{\Phi}(\hat{F} \Phi G + \tilde{G}).u \rangle \quad (3.9)$$

Le résultat suivant est démontré en annexe 2 :

$$\hat{\Phi}(\hat{F} \Phi G + \tilde{G}) = \hat{\Phi}(\hat{F} \hat{G} + \tilde{G}) \quad (3.10)$$

Alors :

$$\langle \Gamma(u^k), u \rangle = \langle Q x^k, \hat{\Phi}(\hat{F} \hat{G} + \tilde{G}).u \rangle = \langle \hat{\Phi}^* Q x^k, \hat{F}(\hat{\Phi} G u) + \tilde{G} u \rangle \quad (3.11)$$

Interprétons cette nouvelle expression. Posons $\lambda^k = \Phi^* Q x^k$.

En utilisant (II.1.9) et la définition de l'opérateur adjoint par rapport au produit scalaire habituel de $L^2[(t_0, T), \mathbb{R}^n]$, on établit facilement (par le théorème de Fubini) que :

$$\lambda^k(t) = \int_t^T \Phi'(s, t) Q(s) x^k(s) ds \quad (3.12)$$

ce qui équivaut à (3.3).

D'autre part, considérons, dans (3.11), la quantité $\hat{\Phi} \hat{G} u$. Elle diffère de :

$$\xi = \hat{F} \xi + \hat{G} u + v^k, \quad \xi(t_0) = \alpha \quad (3.13)$$

qui est la dynamique locale au pas $k+1$, par les termes $\hat{\Phi} v^k$ et $\hat{\Phi}(t, t_0) \alpha$ qui sont autant de constantes lors de l'optimisation locale. Par conséquent, on peut assimiler $\hat{\Phi} \hat{G} u$ et ξ dans (3.11) qui devient, enfin :

$$\langle \Gamma(u^k), u \rangle = \langle \lambda^k, \hat{F} \xi + \hat{G} u \rangle = \int_{t_0}^T \lambda^{k'} (\hat{F} \xi + \hat{G} u) dt \quad (3.14)$$

Ceci achève la démonstration ■

En prenant la partie i du dernier membre ci-dessus :

$$\int_{t_0}^T \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}^{k'} (F_{ji} \xi_j + G_{ji} u_j) dt \quad (3.15)$$

et en ajoutant à (3.1), on obtient le critère $J_1^k(u_1)$ au pas $k+1$. Avec la dynamique locale :

$$\dot{\xi}_i = F_{ii} \xi_i + G_{ii} u_i + \sum_{j \neq i} (F_{ij} x^k + G_{ij} u^k); \quad \xi_i(t_0) = \alpha_i \quad (3.16)$$

on a complètement défini le problème local i .

les équations qui résolvent ce problème sont données dans la récapitulation ci-dessous de l'algorithme (pour justification, cf. annexe 4) :

- a) Intégrer les N équations de Riccati :

$$\dot{P}_{ii} + P_{ii} F_{ii} + F_{ii}' P_{ii} - P_{ii} G_{ii}^{-1} G_{ii}' P_{ii} + Q_{ii} = 0 \quad ; \quad P_{ii}(T) = 0 \quad (3.17)$$

- b) Poser $k=0$ et choisir une première prédiction

$$\{u^0(t); t \in [t_0, T]\}.$$

- c) Intégrer (II.1.1) avec la commande $u^k(\cdot)$, ou la mettre en oeuvre sur le système réel. Enregistrer $x^k(\cdot)$.

- d) Calculer $J(u^k)$ (intégrale (ii.1.2)) et la stocker. Si $k > 0$, et si $J(u^k) \geq J(u^{k-1})$, la condition (2.5) n'est pas vérifiée. Recourir alors à la modification quadratique (2.13, (cf. remarque g) ci-dessous). Si $k > 0$, si $J(u^k) < J(u^{k-1})$, et si la différence en valeur absolue est inférieure à un seuil fixé à l'avance, arrêter la coordination. Sinon continuer.

- e) Intégrer (3.3) et enregistrer $\lambda^k(\cdot)$.

- f) Résoudre les N problèmes locaux définis plus haut (c'est à dire (3.16) et (3.15) + (3.1)). Pour cela, intégrer les équations linéaires :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^{k+1} + (F_{ii}' - P_{ii} G_{ii}^{-1} G_{ii}') \xi_i^{k+1} - P_{ii} G_{ii}^{-1} R_{ii}^{-1} \left[\sum_{j \neq i} (F_{ij} u_j^k + (G_{ij})' \lambda_j^k) \right] \\ + P_{ii} \left[\sum_{j \neq i} (F_{ji}' x_j^k - G_{ji} u_j^k) \right] + \sum_{j \neq i} (Q_{ij} u_j^k + (P_{ji})' \lambda_j^k) = 0; \quad \xi_i(T) = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

puis les équations (3.16) où u_i est remplacée par :

$$u_i = R_{ii}^{-1} [G_{ii}' P_{ii} \xi_i + G_{ii}' \xi_i^{k+1} + \sum_{j \neq i} (R_{ij} u_j^k + (G_{ji})' \lambda_j^k)] \quad (3.19)$$

Enfin, reporter le résultat $\xi_i^{k+1}(\cdot)$ dans (3.19) pour obtenir

$$\{u_i^{k+1}(t), t \in [t_0, T]\}.$$

- g) Arrêter la coordination si $\|u^{k+1} - u^k\|_{L^2}$ est inférieur à un seuil fixé à l'avance. Sinon changer $k+1$ en k et revenir en c).

REMARQUE 3.1. Il faut faire preuve d'une certaine prudence dans l'utilisation des tests d'arrêt g) et d). En effet, si ces deux tests sont positifs et si la modification quadratique (2.13) a été utilisée, il se peut que celle-ci soit trop importante (K_1 très grand devant B_1), de telle sorte que u^{k+1} est contraint à être proche de u^k . Si le test g) est négatif, mais le test d) positif ($\mathcal{J}(u^k) < \mathcal{J}(u^{k-1})$ mais différence petite), il se peut que la condition (2.5) (ou (2.14)) soit tout juste vérifiée, de sorte que $C(\text{of}(2.7) \text{ et } (2.16))$ soit positif mais de norme très petite. Utiliser alors la modification quadratique (ou augmentation de celle-ci).

COMMENTAIRES ET REMARQUES DIVERSES :

- a) Le pas e) ci-dessus correspond au travail essentiel de coordination. On notera que c'est un calcul de taille globale mais linéaire, alors que la résolution du problème demande un calcul quadratique. Il est possible au fur et à mesure que la taille du problème croît, que le premier calcul reste possible alors que le second devient impossible. En effet le nombre de variables croît comme n dans les calculs linéaires, comme $n^2/2$ dans les calculs quadratiques. De plus, à nombre de variables égal, les problèmes de stabilité numérique sont plus critiques dans le cas quadratique. D'autres considérations (inversions de matrices dans l'équation de Riccati) entrent en ligne de compte.
- b) Lorsque l'on dispose de λ^k , on dispose facilement du gradient \mathcal{J} en u^k :

$$\nabla \mathcal{J}(u^k) = Ru^k + G^T \lambda^k \quad (3.20)$$

et on peut donc calculer une meilleure commande par un algorithme de gradient simple. Cependant nous avons vu que notre algorithme s'apparente plus à un algorithme de Newton (Remarque 2.2) dont les calculs non linéaires sont décentralisés. La convergence devrait en être meilleure et le choix d'un pas de déplacement dans la direction de descente est ici automatique.

c) Le pas e) ainsi que le pas f) prennent place entre deux périodes $[t_0, T]$ pendant lesquelles le système est commandé (pas c)). Si le temps disponible entre deux telles périodes, dans une mise en oeuvre en ligne, était insuffisant pour mener ces calculs, on pourrait envisager d'utiliser la k^{e} période $[t_0, T]$ pour faire les calculs aux niveaux coordinateur puis local avec les informations recueillies pendant la période $k-1$, afin de calculer la commande u^{k+1} . Cette procédure n'a pas été étudiée plus avant.

d) Le pas f) (résolution des problèmes locaux) nécessite 2 intégrations linéaires par sous-système, l'équation de Riccati étant elle invariable et intégrée une fois pour toute. Il faut bien voir que la seconde de ces intégrations (simulation des systèmes locaux (3.16) avec les commandes (3.19)) n'a pour but que de calculer la version en boucle ouverte de u^{k+1} , car c'est elle qui doit être utilisée. En effet, toute la théorie a été menée dans des espaces L^2 de fonctions du temps, et l'intervention accidentelle de commandes apparemment en boucle fermée, (cf. (3.19)) est purement technique. On ne renouvelle pas ici l'approche heuristique du § II.3. On reviendra au dernier chapitre sur le problème de la coordination en ligne et en boucle fermée.

e) Ici, on peut considérer que l'on a affaire à un algorithme en ligne et en boucle ouverte (décroissance monotone de J , utilisation de la réponse du système réel pour la coordination...). Il s'applique à des systèmes périodiques, c'est-à-dire repartant à chaque début de période à la même condition initiale α . Ce peut-être par exemple le cas d'un processus industriel remis en marche tous les jours à partir

du même état. Le feedback au niveau coordonnateur créé par le "recyclage" de (u^k, x^k) comme nouvelle prédiction conduira à un caractère "adaptatif" de l'algorithme en ligne, dans le cas de pannes de certains sous-systèmes, qui sera étudié au chapitre suivant.

f) On peut voir facilement que :

$$A = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2} = R + G' \Phi^* Q \Phi G \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial u^2} = R + \hat{G}' \hat{\Phi}^* \hat{Q} \hat{\Phi} \hat{G} \Rightarrow B = \hat{R} + \hat{G}' \hat{\Phi}^* \hat{Q} \hat{\Phi} \hat{G} \quad (3.22)$$

On voit que A et B sont "fabriqués" de la même façon à partir du quadruplé (F, G, Q, R) et de ses parties bloc-diagonales. L'application :

$$(F, G, Q, R) \rightarrow R + G' \Phi^* Q \Phi G \quad (3.23)$$

permet donc de résumer en un seul opérateur le couplage provenant à la fois de la dynamique et du critère, par comparaison de A et B. La condition (2.5) définit le couplage maximum admissible. Mais on a vu (lemme 2.2) que cette limitation peut-être tournée.

g) A propos justement du lemme 2.2, il est judicieux de prendre ici (au vu de (3.22)) :

$$M = \bar{R} + \hat{G}' \hat{\Phi}^* \bar{Q} \hat{\Phi} \hat{G} \quad (3.24)$$

\bar{R} et \bar{Q} étant des matrices bloc-diagonales. Ceci correspond à :

$$\frac{1}{2} \langle u - u^k, M(u - u^k) \rangle = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [(\xi - x^k)' \bar{Q}(\xi - x^k) + (u - u^k)' \bar{R}(u - u^k)] dt \quad (3.25)$$

On peut suggérer même selon (2.15) de prendre : $\bar{Q} = \gamma \hat{Q}$ et $\bar{R} = \gamma \hat{R}$.

Nous donnerons au chapitre suivant les modifications à apporter aux équations de résolution des problèmes locaux.

k) On peut énoncer le corollaire suivant du théorème 2.1 :

COROLLAIRE : L'algorithme du §3 converge uniformément
sur $[t_0, T]$. Ceci résulte de résultats classiques sur les
équations différentielles linéaires (cf. BENSOUSSAN [4a,
pp. 22-28]). Introduisons l'espace de Sobolev H^1 (espace
de Hilbert de norme : $\|x\|_{H^1}^2 = \|x\|_{L^2}^2 + \|x'\|_{L^2}^2$).

L'équation (II.1.1) définit une application continue de
l'espace L^2 des commandes dans l'espace de Sobolev des
états. La convergence de $u(.)$ dans L^2 implique donc
celle de $x(.)$ dans H^1 . Alors, comme il existe une injec-
tion continue de H^1 sur C^0 , espace des $x(.)$ muni de
la norme de la convergence uniforme, celle-ci est en
définitive obtenue.

4. Lien entre l'algorithme de TAKAHARA et notre algorithme.

Une simple comparaison des problèmes locaux définis dans
l'algorithme de TAKAHARA (cf. (II.2.12) à (II.2.15)) et
dans notre algorithme (cf. (3.16) et (3.1) + (3.15)) montre
une similitude de forme. Cependant il ne faut pas se laisser
abuser par les notations. En effet, les éléments (x^k, λ^k)
contenus dans les équations (II.2.12) et suivantes vérifient
les équations découplées (II.2.9) et (II.2.10). Inversement,
les x^k et λ^k de ce chapitre vérifient les équations
globales (II.1.1) et (3.3).

On peut dire que l'algorithme de TAKAHARA approxime
notre algorithme en remplaçant les quantités (x^k, λ^k) calculées
globalement par d'autres quantités calculées localement et
qui ont la même limite. Afin de conserver un certain feedback
au niveau coordinateur, on peut envisager une variante
intermédiaire qui consisterait à conserver la prédiction x^k ,
réponse du système réel obtenue sans calcul dans une mise en
oeuvre en ligne, et d'approximer seulement λ^k solution de
(3.3) par la solution de (II.2.10), ce qui supprimerait le
seul calcul de taille globale. Il est douteux que l'on puisse
démontrer théoriquement la convergence d'un tel schéma hybride.

L'algorithme de TAKAHARA n'utilise pas de calculs globaux mais il se présente comme un algorithme hors ligne dans la mesure où il ne nécessite pas d'observer la réponse du système réel. On n'a pas démontré à son sujet que les commandes u^k successives appliquées au système réel feraient décroître le critère global J . On n'a d'ailleurs pas non plus exhibé de condition de convergence. Seule la limite u^* , si elle est obtenue, est à priori bonne pour une utilisation en ligne.

On vient de dégager quelques caractéristiques de la coordination en ligne :

- a) Commande du système réel à chaque pas de coordination, sans attendre la convergence de l'algorithme.
- b) Décroissance à chaque pas du critère global.
- c) Utilisation de la réponse du système réel pour la coordination.

À ces trois caractéristiques réalisées par notre algorithme, on est tenté d'y adjoindre la suivante, naturelle pour des applications en ligne.

- d) Commandes locales en boucle fermée.

Ce dernier point sera discuté dans le dernier chapitre. Les points a) et b) simultanément ont un intérêt évident. Le point c), qui est une sorte de feedback au niveau coordonnateur apportera des caractéristiques adaptatives étudiées au chapitre suivant (fonctionnement dégradé).

ETUDE DU FONCTIONNEMENT DEGRADÉ
AUTRES APPLICATIONS DE L'ALGORITHME GÉNÉRAL

La deuxième partie de ce chapitre se présente surtout comme un formulaire à l'usage de l'utilisateur. On donnera les équations de l'algorithme dans le cas d'un problème linéaire-quadratique à temps discret, dans le cas du problème linéaire-quadratique à temps continu le plus général et enfin dans le cas non-linéaire à temps continu.

Au préalable, nous étudierons le comportement de l'algorithme en cas de pannes de sous-systèmes.

1. Fonctionnement dégradé

Nous avons déjà fait remarquer au §I.3 qu'un avantage de la structure de commande de la figure 1, tant du point de vue calcul que du point de vue mise en oeuvre, est de répartir le risque et de minimiser les conséquences de pannes des organes de calcul ou de commande. Nous allons montrer que l'algorithme général élaboré au Chapitre III satisfait à cette observation générale.

THEOREME 1.1 : Dans le contexte du théorème II.2.1, supposant la condition (II.2.5) (ou (II.2.14)) satisfaite, mais supposant que pour $i \in I \in \{1, \dots, K\}$, les sous-vecteurs u_i^k sont maintenus égaux, pour tout k , à une valeur \bar{u}_i , la performance globale $J(u^k)$ décroît à chaque pas et la suite $\{u^k\}$ converge vers la meilleure commande possible, compte tenu de la contrainte imposée sur $\{u_i, i \in I\}$.

DEMONSTRATION :

Nous noterons u_I la concaténation des $\{u_i, i \in I\}$ en supposant, sans perte de généralité que $I = \{1; 1 \leq i \leq N\}$. Nous noterons u_{II} le complément. On peut alors partitionner les opérateurs A et B du théorème III.2.1 en :

$$A = \begin{bmatrix} A_I & A_{II} \\ * & A_{II} \\ A_{II} & A_{II} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_I & 0 \\ 0 & B_{II} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Considérant la formule (III.2.3), au pas $k+1$, on a ici :

$$u_I^{k+1} = \bar{u}_I \quad \text{et} \quad u_{II}^{k+1} = u_{II}^k - B_{II}^{-1} \nabla_{II} g(u^k) \quad (1.2)$$

De plus :

$$\begin{aligned} g(u^{k+1}) - g(u^k) &= \langle \nabla_{II} g(u^k), u_{II}^{k+1} - u_{II}^k \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle u_{II}^{k+1} - u_{II}^k, \frac{\partial^2 g}{\partial u_{II}^2}(u_{II}^{k+1} - u_{II}^k) \rangle \end{aligned} \quad (1.3)$$

Utilisant (1.2), on obtient finalement :

$$g(u^k) - g(u^{k+1}) = \langle B_{II}^{-1} \nabla_{II} g(u^k), (B_{II} - A_{II}/2) B_{II}^{-1} \nabla_{II} g(u^k) \rangle \quad (1.4)$$

Si la condition (III.2.5) est satisfaite, alors :

$$B_{II} - A_{II}/2 > 0 \quad (1.5)$$

ce qui prouve que $\{g(u^k)\}$ est décroissante. Comme elle est bornée inférieurement par $g(u^*)$, elle a une limite $g_{lim} \geq g(u^*)$. Donc $g(u^k) - g(u^{k+1}) \rightarrow 0$ et par (1.5) et (1.4), $\nabla_{II} g(u^k) \rightarrow 0$. Mais :

$$\nabla_{II} g(u^k) = A_{III}^* (\bar{u}_I - u_I^*) + A_{II} (u_{II}^k - u_{II}^*) \quad (1.6)$$

et du fait de l'inversibilité A_{II} , due à celle de A , $\{u_{II}^k\}$ a une limite :

$$u_{II}^{\lim} = -A^{-1} \frac{A^*}{II} (\bar{u}_I - u_I^*) \quad (1.7)$$

Bien sûr, $\nabla_{II} g(u^{\lim}) = 0$, ce qui prouve que u_{II}^{\lim} est la commande optimale lorsque u_I est figé à \bar{u}_I .

Imaginons que, au pas $k+1$ de l'algorithme coordonnateur, les sous-systèmes $i \in I$ tombent en panne. Il peut s'agir d'une panne de l'organe de calcul de ces sous-systèmes ou bien d'une panne dans la transmission des informations (prédictions et autres paramètres coordonnateurs) du coordonnateur vers ces contrôleurs locaux. Par contre, on suppose ici que le coordonnateur peut continuer à observer tout l'état. Alors u_I sera maintenue, en attendant la réparation, à la dernière valeur u_I^k obtenue. Le critère g continuera à décroître à partir de $g(u^k)$. Lorsque la réparation sera effectuée, l'algorithme pourra reprendre son cours normal et converger vers l'optimum global.

S'il s'agit d'une panne de l'organe de commande des sous-systèmes, on peut modéliser cette occurrence en disant que $\bar{u}_I = 0$. Alors, le critère g peut subir un saut à l'instant de la panne du fait que u_I^k est amenée à zéro. Mais la décroissance de g reprendra à partir de cette nouvelle valeur.

2. Problème linéaire-quadratique à temps discret.

Nous avons cru devoir établir les équations générales de résolution du problème linéaire-quadratique à temps discret, car elles sont moins courantes dans la littérature que celle du cas continu. Ceci est fait en annexe 3.

Considérons maintenant le problème :

$$x(t+1) = F(t)x(t) + G(t)u(t) ; x(t_0) = \alpha ; t=t_0, \dots, T-1 \quad (2.1)$$

$$\min_u \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{T-1} [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)] \quad (2.2)$$

et pour une décomposition donnée de l'état et de la commande, le modèle local et la fonction de couplage :

$$\xi(t+1) = \hat{F}(t)\xi(t) + \hat{G}(t)u(t) + v(t) ; \xi(t_0) = \alpha \quad (2.3)$$

$$v(t) = \tilde{F}(t)\xi(t) + \tilde{G}(t)u(t) \quad ; t=t_0, \dots, T-1 \quad (2.4)$$

Les vecteurs

$$x'(\cdot) = (x'(t_0+1), \dots, x'(T)) ; u'(\cdot) = (u'(t_0), \dots, u'(T-1))$$

$$v'(\cdot) = (v'(t_0), \dots, v'(T-1)) \quad (2.5)$$

appartiennent à des espaces de dimension finie, structurés en espaces L^2 par le produit scalaire habituel. $J(u)$ est la valeur de (2.2) lorsque x est donné par (2.1) et $J(u,v)$ est obtenue de même à partir de (2.3). L'équation (2.4) définit la fonction $v=H(x,u)$, d'où les fonctions K ou \bar{K} par substitution à x de la sortie de (2.1) ou de (2.3).

La définition d'une partie des critères locaux par restriction conduit à une expression analogue à (III.3.1) transposée au cas discret. Il reste à calculer l'opérateur d'interaction (III.3.4).

LEMME 2.1 : La modification linéaire $\langle \Gamma(u^k), u \rangle$ est égale à des constantes près à :

$$\sum_{t=t_0}^{T-1} \lambda^{k'}(t+1)(\tilde{F}(t)\xi(t) + \tilde{G}(t)u(t)) \quad (2.6)$$

où $\{\lambda(t) ; t=t_0+1, \dots, T\}$ est donné par :

$$\lambda^k(t) = \tilde{F}'(t)\lambda^k(t+1) + Q(t)x^k(t) ; \lambda(T)=0 ; t=T-1, \dots, t_0+1 \quad (2.7)$$

avec x^k donné par (2.1) pour $u=u^k$. De plus ξ est la solution de (2.3) avec v^k donné par (2.4) pour $u=u^k$ et $x=x^k$.

Nous ne ferons pas la démonstration détaillée de ce lemme pour éviter des écritures longues et pénibles. La démarche est en tous points analogue à celle du §III.3 qui a abouti à la formule (III.3.2). L'opérateur Φ du cas continu (définition II.1.1) est ici défini par :

$$\Phi(t,s) = \begin{cases} F(t-1)F(t-2)\dots F(s+1)F(s) & \text{si } s < t \\ 1 & \text{si } s = t \\ \Phi^{-1}(t,s) & \text{si } s > t \end{cases} \quad (2.8)$$

$$b = \Phi a \quad \left\{ \begin{array}{l} b(t) = \sum_{s=t_0+1}^t \Phi(t,s)a(s) \\ \text{ou} \\ b(t) = \sum_{s=t_0+1}^t \Phi(t,s)a(s-1) \end{array} \right. ; t=t_0+1, \dots, T \quad (2.9)$$

selon que $a(\cdot)$ est numéroté comme $x(\cdot)$ et $\lambda(\cdot)$ (de t_0+1 à T) ou comme $u(\cdot)$ et $v(\cdot)$ (de t_0 à $T-1$) (cf.(2.5)). L'opérateur adjoint Φ^* par rapport au produit scalaire est alors défini par :

$$b = \Phi^* a \quad \left\{ \begin{array}{l} b(t) = \sum_{s=t}^T \Phi'(s,t)a(s) \\ \text{ou} \\ b(t) = \sum_{s=t}^T \Phi'(s,t)a(s-1) \end{array} \right. ; t=t_0+1, \dots, T \quad (2.10)$$

formule analogue au cas continu.

On établit alors une formule équivalente à (A.2.7) ce qui permet d'aboutir à (2.7). Finalement le problème local i s'exprime :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t+1) &= F_{11}(t)\varepsilon_1(t) + G_{11}(t)u_1(t) + \sum_{j \neq 1} (F_{1j}(t)x_j^k(t) + G_{1j}(t)u_j^k(t)) ; \\ \varepsilon_1(t_0) &= \alpha_1 ; t=t_0, \dots, T-1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \min_{u_1} \sum_{t=t_0}^{T-1} [& \frac{1}{2} \varepsilon_1'(t) Q_{11}(t) \varepsilon_1(t) + \frac{1}{2} u_1'(t) R_{11}(t) u_1(t) + \\ & \sum_{j \neq 1} (x_j^k(t) Q_{j1}(t) + \lambda_j^{k,k}(t+1) F_{j1}(t)) \varepsilon_1(t) + \\ & \sum_{j \neq 1} (u_j^k(t) R_{j1}(t) + \lambda_j^{k,k}(t+1) G_{j1}(t)) u_1(t)] \end{aligned} \quad (2.12)$$

L'algorithme ci-dessous utilise les équations générales établies en annexe 3 :

a) Intégrer les N équations de Riccati :

$$\begin{aligned} P_1(t) &= Q_{11}(t) + F_{11}'(t) [P_1(t+1) - \\ & P_2(t+1) G_{11}(t) (R_{11}(t) + G_{11}'(t) P_2(t+1) G_{11}(t))^{-1} G_{11}(t) E_1(t+1)] P_{11}(t) ; \\ P_1(T) &= 0 ; t = T-1, \dots, t_0+1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

b) Poser $k=0$, choisir une première prédiction

$$\{u^0(t) : t = t_0, \dots, T-1\}$$

c) Intégrer (2.1) avec la commande u^k ou la mettre au point sur le système réel. Enregistrer x^k .

d) Calculer $g(u^k)$ (somme (2.2)) et la stocker. Si $k > 0$, et si $g(u^k) \geq g(u^{k-1})$, la condition (III.2.5) n'est pas vérifiée. Recourir alors à la modification quadratique (III.2.13) soit ici :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{T-1} [& (\varepsilon_1(t) - x_1^k(t))' \bar{Q}_1(t) (\varepsilon_1(t) - x_1^k(t)) + \\ & (u_1(t) - u_1^k(t))' \bar{R}_1(t) (u_1(t) - u_1^k(t))] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Si $k < 0$, si $\rho(u^k) < \rho(u^{k-1})$ et si la différence en valeur absolue est inférieure à un seuil fixé à l'avance, arrêter la coordination. Sinon continuer.

e) Intégrer (2.7) et enregistrer $\lambda^k(\cdot)$.

f) Résoudre les N problèmes locaux (2.11)-(2.12) c'est-à-dire intégrer les équations linéaires :

$$\begin{aligned} \xi_1^{k+1}(t) = & P_{11}'(t) [I - P_1(t+1)G_{11}(t)(R_{11}(t) + G_{11}'(t)P_1(t+1)G_{11}(t))^{-1}G_{11}'(t)] \cdot \\ & [\xi_1^{k+1}(t+1) + P_1(t+1) \sum_{j \neq 1} (P_{1j}(t)x_j^k(t) + G_{1j}(t)u_j^k(t))] + \\ & \sum_{j \neq 1} [Q_{1j}(t)x_j^k(t) + (P_{ji}(t))' \lambda_j^k(t+1)] - \\ & P_{11}'(t)P_1(t+1)G_{11}(t)(R_{11}(t) + G_{11}'(t)P_1(t+1)G_{11}(t))^{-1} \times \\ & [\sum_{j \neq 1} (R_{1j}(t)u_j^k(t) + (G_{ji}(t))' \lambda_j^k(t+1))] ; \xi_1^{k+1}(T) = 0 ; t = T-1, \dots, t_0+1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

puis les équations (2.11) avec u_1 remplacé par :

$$\begin{aligned} u_1 = & -(R_{11}(t) + G_{11}'(t)P_1(t+1)G_{11}(t))^{-1} [G_{11}'(t)P_1(t+1)P_{11}(t)\xi_1(t) + \\ & G_{11}'(t)\xi_1^{k+1}(t+1) + \\ & G_{11}'(t)P_1(t+1) \sum_{j \neq 1} (P_{1j}(t)x_j^k(t) + G_{1j}(t)u_j^k(t)) + \\ & \sum_{j \neq 1} (R_{1j}(t)u_j^k(t) + (G_{ji}(t))' \lambda_j^k(t+1))] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Reporter le résultat $\xi_1^{k+1}(\cdot)$ dans (2.10) pour obtenir $u_1^{k+1}(\cdot)$

g) Arrêter la coordination si $\|u^{k+1} - u^k\|$ est inférieure à un seuil fixé à l'avance. Sinon changer $k+1$ en k et revenir en c).

Sur l'utilisation des tests g) et d), cf. remarque III.3.1.

3. Problème linéaire-quadratique à temps continu le plus général

Nous voulons ici donner les équations de l'algorithme pour le problème :

$$\dot{x} = Fx + Gu + w \quad ; \quad x(t_0) = \alpha \quad (3.1)$$

$$\text{Min. } \frac{1}{2} x'(T) D x(T) + d'x(T) + \int_{t_0}^T \left[\frac{1}{2} (x', u') \begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + (q', r') \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right] dt \quad (3.2)$$

où toutes les matrices peuvent dépendre du temps, et $w(\cdot)$ est une excitation extérieure donnée. En annexe 4, on trouvera les équations générales de résolution de ce problème.

Celui-ci peut provenir d'un problème de poursuite :

$$\min \int_{t_0}^T [(x-z)' Q (x-z) + u' R u] dt$$

où $z(\cdot)$ est une trajectoire désirée.

Par rapport au problème du § III.3, la présence d'un coût final modifie l'expression (III.3.21) et (III.3.22) des opérateurs dérivées secondes intervenant dans la condition de convergence (III.2.5). D'autre part, le calcul de la modification linéaire due à l'opérateur d'interaction et notamment les manipulations de l'appendice 2 sont maintenant plus délicats.

Ces questions ont été traitées par M. JUBOIS, élève-ingénieur de 3e année à l'Ecole des Mines de Reims.

Elles nécessitent l'introduction d'un nouvel opérateur.

DEFINITION 3.1 : Φ étant l'opérateur dans $L^2[(t_0, T); \mathbb{R}^n]$ de la définition II.1.1, on définit l'opérateur Φ de L^2 dans \mathbb{R}^n par :

$$va(\cdot) \in L^2[(t_0, T); \mathbb{R}^n] : b = \forall a \Rightarrow b = (\Phi a)(T) = \int_{t_0}^T \Phi(T, s) a(s) ds \quad (3.3)$$

Appliquant la définition de l'adjoint, on établira facilement que :

$$\Psi^* : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2([t_0, T]; \mathbb{R}^n) : \forall a \in \mathbb{R}^n, b(\cdot) = \Psi^* a \Rightarrow b(t) = \Phi'(T, t)a \quad (3.4)$$

Grâce à ces éléments on peut écrire :

$$x(\cdot) = \Phi(Gu(\cdot) + w(\cdot)) + y(\cdot) \quad \text{avec} \quad y(t) = \Phi(t, t_0)\alpha \quad (3.5)$$

$$x(T) = \Psi(Gu(\cdot) + w(\cdot)) + \dot{y}(T) \quad (3.6)$$

Reportant ces expressions dans (3.2), on exprime $J(u)$ explicitement ce qui permet de calculer $\nabla J(u)$ et :

$$A = \frac{d^2 J}{du^2} = R + G'(\Psi^* D\Psi + \Phi^* Q\Phi)G + S' \Phi G + G' \Phi^* S \quad (3.7)$$

Appliquant la même technique au modèle local :

$$\dot{\xi} = \hat{F}\xi + \hat{G}u + v + w ; \xi(t_0) = \alpha \quad (3.8)$$

$$v = \hat{F}_x x + \hat{F}_u u \quad (3.9)$$

et à $J(u, v)$ défini comme précédemment, on trouve :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial u^2} = R + \hat{G}'(\hat{\Psi}^* D\hat{\Psi} + \hat{\Phi}^* Q\hat{\Phi})\hat{G} + S' \hat{\Phi} \hat{G} + \hat{G}' \hat{\Phi}^* S \quad (3.10)$$

$$B = \frac{\partial^2 J}{\partial u^2} = \hat{R} + \hat{G}'(\hat{\Psi}^* D\hat{\Psi} + \hat{\Phi}^* Q\hat{\Phi})\hat{G} + S' \hat{\Phi} \hat{G} + \hat{G}' \hat{\Phi}^* S \quad (3.11)$$

Il reste à calculer l'opérateur d'interaction.

LEMME 3.1 : La modification linéaire $\langle T(u^k), u \rangle$ est égale à des constantes près à (III.3.2) où $\lambda^k(\cdot)$ est maintenant donné par :

$$\dot{\lambda}^k = -F' \lambda^k - (Qx^k + Su^k + q), \quad \lambda^k(T) = D x^k(T) + a \quad (3.12)$$

où x^k est donné par (3.1) avec $u=u^k$ et ξ (dans III.3.2)), est l'état du système découplé (3.16) ci-dessous.

DEMONSTRATION :

Appliquant la formule (III.3.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(u^k), u \rangle &= \langle \nabla_v J(u^k, K(u^k), \frac{dK}{du} \cdot u \rangle \\ &= \langle Qx^k + Su^k + q, \hat{\Phi}(\hat{F}\Phi G + \hat{G}) u \rangle + \\ &\quad \langle Dx^k(T) + d, \hat{\Psi}(\hat{F}\Phi G + \hat{G}) u \rangle \end{aligned} \quad (3.13)$$

Le premier des deux termes ci-dessus est traité comme précédemment (cf. Annexe 2). Quant au second, nous opérerons sur lui des transformations similaires en nous appuyant sur les résultats déjà acquis.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\hat{F}\Phi G + \hat{G})u &= [\hat{\Phi}(\hat{F}\Phi G + \hat{G})u](T) = [\hat{\Phi}(\hat{F}\hat{\Phi}\hat{G} + \hat{G})u](T) \\ &= \hat{\Psi}(\hat{F}\hat{\Phi}\hat{G} + \hat{G})u \end{aligned} \quad (3.14)$$

La première et la dernière égalités résultent de l'application de la définition 3.1 de $\hat{\Phi}$, la deuxième égalité est l'application du résultat de l'annexe 2. Finalement :

$$\langle \Gamma(u^k), u \rangle = \langle \hat{\Phi}^*(Qx^k + Su^k + q) + \hat{\Psi}^*(Dx^k(T) + d), \tilde{F}\hat{\Phi}\hat{G}u + \tilde{G}u \rangle \quad (3.15)$$

Le premier terme du produit scalaire est égal à λ^k donné par (3.12) d'après (III.3.12) (adapté ici) et (3.4). Quant au second terme, on voit qu'il peut s'écrire, à des constantes près, $\tilde{F}\xi + \tilde{G}u$ où ξ est donné par :

$$\dot{\xi} = \hat{F}\xi + \hat{G}u + \hat{F}x^k + \hat{G}u^k + w ; \quad \xi(t_0) = \alpha \quad (3.16)$$

Ceci achève la démonstration ■

Les problèmes locaux, écrits globalement, sont constitués de la dynamique (3.6) et du critère (incluant une modification quadratique donnée par les matrices bloc-diagonales \bar{D} , \bar{Q} , \bar{R} et \bar{S} :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \xi'(T) D \xi(T) + (d' + x^k(T) \bar{D}) \xi(T) + \frac{1}{2} (\xi(T) - x^k(T))' \bar{D} (\xi(T) - x^k(T)) \\ & + \int_{t_0}^T \left[\frac{1}{2} (\xi', u') \begin{pmatrix} \hat{Q} & \hat{S} \\ \hat{S}' & \hat{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ u \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\xi' - x^{k'}(t), u' - u^k(t)) \begin{pmatrix} \bar{Q} & \bar{S} \\ \bar{S}' & \bar{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi - x^k(t) \\ u - u^k(t) \end{pmatrix} \right] dt \\ & (q + \tilde{Q} x^k + \tilde{F}' \lambda^k + \tilde{S} u^k)' \xi + (p + \tilde{R} u^k + \tilde{G}' \lambda^k + \tilde{S}' x^k)' u] dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

Les équations de résolution de ces problèmes sont obtenues à partir de l'annexe 4 et sont données dans la récapitulation suivante :

a) choisir les matrices $\bar{D}, \bar{Q}, \bar{R}, \bar{S}$ en vue de satisfaire la condition de convergence (III.2.14) où A et B sont donnés par (3.7) et (3.11) et M est obtenue comme B avec les matrices surlignées. Cette opération est toujours possible avec des matrices suffisamment positives.

b) intégrer les N équations de Riccati :

$$\begin{aligned} & \dot{\bar{P}}_i + \bar{P}_i \bar{F}_{i+1} + \bar{F}_{i+1}' \bar{P}_i - (\bar{P}_i \bar{G}_{i+1} + \bar{S}_{i+1} + \bar{S}_{i+1}') (R_{i+1} + \bar{R}_i)^{-1} (\bar{G}_{i+1}' \bar{P}_i + \bar{S}_{i+1}' + \bar{S}_{i+1}') \\ & + Q_{i+1} + \bar{Q}_i ; \quad \bar{P}_i(T) = \bar{D}_{i+1} + \bar{D}_i \end{aligned} \quad (3.8)$$

c) poser $k=0$, choisir une première prédiction $(u^k(t)) ; t \in [t_0, t_f]$

d) intégrer (3.1) avec la commande $u^k(\cdot)$, ou la mettre en oeuvre sur le système réel. Enregistrer $x^k(\cdot)$

e) calculer $J(u^k)$ (critère (3.2)) et le stocker. Si $k > 0$ et si $J(u^k) > J(u^{k-1})$, la condition (III.2.14) n'est pas vérifiée. Revenir en b) en augmentant les matrices surlignées (les rendre plus positives). Changer k en $k+1$ et aller en g).

Si $k > 0$, si $\rho(u^k) < \rho(u^{k-1})$ et si la différence est inférieure en valeur absolue à un seuil fixé à l'avance, arrêter la coordination. Sinon continuer.

f) intégrer (3.12) et enregistrer $\lambda^k(\cdot)$.

g) résoudre les problèmes locaux c'est-à-dire intégrer les équations linéaires :

$$\begin{aligned} & \dot{g}_i^{k+1} + [P'_{ii} - (P_{ii}G_{ii} + S_{ii} + \bar{S}_i)(R_{ii} + \bar{R}_i)^{-1}G'_{ii}]g_i^{k+1} \\ & - (P_{ii}G_{ii} + S_{ii} + \bar{S}_i)(R_{ii} + \bar{R}_i)^{-1}(r_i + \sum_{j \neq i} [R_{ij}u_j^k + (G_{ji})' \lambda_j^k + (S_{ji})' x_j^k] - \\ & \quad R_{ii}u_i^k - \bar{S}_i' x_i^k) \\ & + P_i(w_i + \sum_{j \neq i} [P_{ij}x_j^k + G_{ij}u_j^k]) + q_i - \bar{Q}_i x_i^k - \bar{S}_i' u_i^k \\ & + \sum_{j \neq i} [Q_{ij}x_j^k + (F_{ji})' \lambda_j^k + S_{ij}' u_j^k] = 0 ; \\ & \dot{g}_i^{k+1}(T) = d_i + \sum_{j \neq i} D_{ij} x_j^k(T) - \bar{D}_i x_i^k(T) \end{aligned}$$

puis les parties i , pour $i=1, \dots, N$, des équations (3.16), u_i est remplacé par :

$$\begin{aligned} u_i = & -(R_{ii} + \bar{R}_i)^{-1} [(G'_{ii}P_i + S'_{ii} + \bar{S}'_i)g_i + G'_{ii}\dot{g}_i^{k+1} + \\ & r_i + \sum_{j \neq i} (R_{ij}u_j^k + (G_{ji})' \lambda_j^k + S_{ji}' x_j^k) - \bar{R}_i u_i^k - \bar{S}_i' x_i^k] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Enfin reporter le résultat $\xi_j^{k+1}(\cdot)$ dans (3.20) pour obtenir $u_i^{k+1}(\cdot)$.

h) arrêter la coordination si $\|u^{k+1} - u^k\|$ est inférieur à un seuil fixé à l'avance. Sinon charger $k+1$ en k et revenir en c).

Sur l'utilisation des tests e) et h), cf. remarque 11.3.1

4. Problème de commande optimale non-linéaire

Considérons le problème de commande optimale, à temps final fixé :

$$\dot{x} = F(x, u, t) \quad , \quad x(t_0) = \alpha \quad (4.1)$$

$$\min_u D(x(T)) + \int_{t_0}^T L(x, u, t) dt \quad (4.2)$$

On suppose qu'il a une solution. La décomposition précédente du système global en sous-systèmes dans le cas linéaire est généralisée ici de la façon suivante. Pour une décomposition donnée de l'espace d'état et de l'espace des commandes, en notant ξ_1 l'état "local", on suppose qu'on a pu définir les éléments suivants :

$$\xi_1 = \xi_1(\xi_1, u_1, v_1, t) \quad ; \quad \xi_1(t_0) = \alpha_1 \quad ; \quad i=1, \dots, N \quad (4.3)$$

$$v = h(u, x, t) \quad (4.4)$$

tels que :

$$yx, u, t : F(x, u, t) = f(x, u, h(u, x, t), t) \quad (4.5)$$

où f désigne la concaténation des f_i .

L'équation (4.5) traduit ici l'équation générale (1.1.7). Les éléments du chapitre I sont ainsi définis : l'application ρ est définie par (4.1) et $\bar{\rho}$ par (4.3). La fonction de couplage H est définie par (4.4) et la fonction K , à partir de H :

$$K(u) = H(u, \rho(u)) \quad (4.6)$$

De même $J(u)$ ou $J(u, v)$ sont les valeurs du critère (4.2) quand x provient de (4.1) ou de (4.3).

A partir de là, on développe les calculs de façon similaire au cas linéaire-quadratique. Ainsi :

LEMME 4.1 : Soit λ^k donné par :

$$\dot{\lambda}^k = - \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x^k, u^k, t) \right]' \lambda^k - \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x^k, u^k, t) \right]' ; \quad (4.$$

$$\lambda^k(T) = \left[\frac{\partial D}{\partial x}(x^k(T)) \right]'$$

Notant,

$$F_v^k(t) = \frac{\partial F}{\partial v}(x^k, u^k, h(u^k, x^k, t), t)$$

$$H_u^k(t) = \frac{\partial h}{\partial u}(u^k, x^k, t) \quad , \quad H_x^k(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(u^k, x^k, t)$$

la modification linéaire $\langle \Gamma_1^k(u^k), u_1 \rangle$ est égale à des ~~des~~ près à :

$$\int_{t_0}^T \sum_{j=1}^N \lambda_j^{k'} (F_v^k)_{jj} ((H_u^k)_{ji} u_i + (H_x^k)_{ji} x_i) dt \quad (4.$$

où ξ_1 est donné par (4.3) avec $v^k(t) = x(u^k(t), x^k(t), t)$

et x^k est la sortie de (4.1) pour $u = u^k$.

Nous ne démontrerons pas ce lemme en détail. Esquissons seulement la démonstration. On introduit, par les définitions II.1.1 et IV.3.1, les opérateurs Φ^k et Ψ^k associés à la matrice $\partial F / \partial x(x^k, u^k, t)$ et les opérateurs $\hat{\Phi}^k$ et $\hat{\Psi}^k$ associés à la matrice $\partial f / \partial x(x^k, u^k, v^k, t)$. On établit, comme en annexe 2, la formule :

$$\begin{aligned} \Phi^k &= \hat{\Phi}^k + \hat{\Phi}^k \frac{\partial F}{\partial v}(x^k, u^k, v^k, t) \frac{\partial h}{\partial x}(u^k, x^k, t) \Phi^k \\ &= \hat{\Phi}^k + \hat{\Phi}^k \frac{\partial F}{\partial v}(x^k, u^k, v^k, t) \frac{\partial h}{\partial x}(u^k, x^k, t) \hat{\Phi}^k \end{aligned} \quad (4.9)$$

La formule du gradient :

$$\nabla J(u) = \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)' \quad (4$$

où H est l'hamiltonien $L + \lambda' F$, où λ est donné par :

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)' ; \lambda(T) = \left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)' \quad (4.7)$$

et les formules (4.9) permettent alors de mener des calculs en tous points similaires au cas linéaire-quadratique, à partir de la formule (III.3.4).

Le critère local i s'obtient en faisant la somme de (4.8) et du terme obtenu par restriction :

$$D(x_1(T) + x^k(T) - x_1^k(T)) + \int_{t_0}^T L(x_1 + x^k - x_1^k, u_1 + u^k - u_1^k, t) dt \quad (4.12)$$

Le problème local i est de minimiser ce critère avec la dynamique (4.3) où v_1 est prédit à $v_1^k = h_1(u^k, x^k, t)$.

L'algorithme se résume à :

- Poser $k = 0$, choisir une première prédiction $u^0(\cdot)$.
- Intégrer (4.1) avec la commande $u^k(\cdot)$ ou la mettre en oeuvre sur le système réel. Enregistrer $x^k(\cdot)$.
- Calculer $J(u^k)$ (critère (4.2)) et le stocker. Si $k > 0$ et si $J(u^k) \geq J(u^{k-1})$, l'algorithme n'est pas convergent. Utiliser une modification quadratique du type (III.3.25). Si $k > 0$, si $J(u^k) < J(u^{k-1})$ et si la différence est inférieure en valeur absolue à un seuil fixé à l'avance, arrêter la coordination. Sinon continuer.
- Intégrer (4.7) et enregistrer $\lambda^k(\cdot)$.
- Résoudre les N problèmes locaux définis plus haut par toute méthode numérique adaptée pour obtenir $u^{k+1}(\cdot)$.
- Arrêter la coordination si $\|u^{k+1} - u^k\|$ est inférieur à un seuil fixé à l'avance. Sinon charger $k+1$ en k et revenir en b).

Comme nous l'avons précisé au chapitre 3, nous n'avons pas abordé le problème de la convergence dans le cas non-quadratique. Toutefois l'utilisation de la modification quadratique devrait permettre d'obtenir le plus souvent cette convergence.

REMARQUE : Il est important de noter que les difficultés dues à la non-linéarité du problème initial se retrouvent plus ou moins, mais à une échelle de taille plus petite, au niveau des

problèmes locaux (pas e)), alors que la tâche de coordination (pas d)) reste aussi simple, que dans le cas linéaire-quadratique (c'est-à-dire linéaire). Ce phénomène est bien dans l'esprit de la théorie étudiée ici.

RESULTATS NUMERIQUES

Les résultats présentés dans ce chapitre sont tirés d'une étude effectuée par M. DUBOUE, élève-ingénieur de 3e année à l'Ecole des Mines de Paris. Il ne constitue pas une étude exhaustive mais sert seulement à illustrer quelques aspects de la mise en oeuvre de l'algorithme, qui n'ont pu être étudiés théoriquement. En particulier, ils donnent quelques indications sur le choix des paramètres dans les matrices \bar{Q} et \bar{R} intervenant dans la modification quadratique (III.3.2b).

1. L'exemple numérique.

Il est défini par les données suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} -0,2125 & 0,1500 & 0,0625 & 0,0000 \\ 0,2000 & -0,2625 & 0,1000 & 0,0625 \\ 0,0925 & 0,0000 & -0,0925 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,1000 & 0,0000 & -0,1000 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,33 & 0,00 \\ 0,00 & -1,50 & 1,50 \\ 1,33 & 0,00 & -1,33 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\alpha' = (5, -5, 0, 0) \quad ; \quad t_0 = 0 \quad ; \quad T = 25$$

Les pointillés définissent le découpage en sous-systèmes, c'est-à-dire que le système est décomposé en trois sous-systèmes de dimensions d'état ($n_1=2$, $n_2=1$, $n_3=1$) et de commande ($m_1=1$, $m_2=1$, $m_3=1$). Nous ne nous étendons pas sur l'interprétation physique du problème que nous considérons comme un exemple d'école. Sa taille réduite autorise une résolution globale qui a d'ailleurs été effectuée. Le résultat que nous en retiendons est le suivant :

$$g(u^*) = 225$$

(valeur optimale du critère). Il ne s'agit donc pas ici de faire la preuve de la puissance de la méthode quant à la taille des problèmes qu'il est possible de résoudre. Nous avons adopté cette taille modeste pour nous autoriser un grand nombre de passages permettant l'étude d'un aspect resté jusqu'à maintenant assez flou.

Remarquons cependant que les couplages, tant par la dynamique que par le critère, entre les sous-systèmes, sont non négligeables.

Les calculs ont été menés sur un calculateur digital (CII-IRIS 80), les intégrations numériques par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 se faisant avec un pas de temps $\Delta t=1$.

Nous n'avons pas étudié la sensibilité du nombre de pas d'itérations (nécessaires pour considérer la convergence comme atteinte) en fonction du point de départ $u^0(.)$ de l'algorithme. Les formules obtenues dans l'étude théorique sont assez explicites à ce sujet. Le point de départ sera donc toujours :

$$u_i^0(t) = 0,3 \quad ; \quad i = 1,2,3 \quad ; \quad t=0, \dots, 20,$$

donnant une valeur initiale du critère :

$$g(u^0) = 995$$

soit environ 440% de la valeur optimale.

2. Etude du choix des matrices \bar{Q} et \bar{R}

L'algorithme non modifié (sans utilisation de la modification quadratique) ne converge pas, ce qui montre la présence d'interactions non négligeables entre sous-problèmes. Il nous faut donc recourir à la modification quadratique (III.3.25) qui doit théoriquement assurer la convergence pour des matrices \bar{Q} et \bar{R} suffisamment positives (cf. lemme (III.2.2.)). Cependant les commentaires suivants ce lemme ont suggéré que, si l'on peut formuler théoriquement un critère du meilleur choix possible de ces matrices, eu égard à la vitesse de convergence, il est bien difficile de parvenir par cette voie à ce meilleur choix.

Aussi nous nous sommes penchés sur ce problème pratique en explorant quelques voies possibles et en tirant quelques enseignements. Le plan d'expériences est le suivant :

- a) Essayer $\bar{R}=0$ et $\bar{Q} = \gamma \hat{Q}$ et rechercher numériquement le meilleur γ (par une procédure du type "section d'or").
- b) Essayer $\bar{Q}=0$ et $\bar{R}=\gamma \hat{R}$ et rechercher le meilleur γ .
- c) Soit γ_1^* et γ_2^* respectivement les valeurs "optimales" précédentes. On pose $\beta = \gamma_1^* / \gamma_2^*$ et on cherche le meilleur γ en adoptant $\bar{R} = \gamma \hat{R}$ et $\bar{Q} = \beta \gamma \hat{Q}$.

La procédure de recherche scalaire consiste à trouver deux valeurs encadrant l'optimum, l'une pour laquelle l'algorithme diverge et l'autre pour laquelle il converge puis à affiner le choix entre ces deux valeurs. Notons que la divergence est détectée dès que les valeurs successives du critère $\{g(u^k)\}$ ne constituent plus une suite monotone décroissante. Cependant, ce phénomène peut ne se révéler qu'après un nombre assez élevé de pas car si l'opérateur (III.2.14) n'est pas défini-positif, les premières itérées de la commande peuvent très bien rester, pendant un certain nombre de pas, dans le "noyau positif" de cet opérateur (sauf s'il est défini négatif). Ce n'est que lorsqu'elles en sortent que la divergence se révèle.

On voit d'ailleurs par ce raisonnement que la constatation d'une convergence n'assure pas que l'opérateur (III.2.14) soit défini-positif (il suffit de rester dans son "noyau positif"). On savait déjà que cette condition n'était pas nécessaire mais seulement suffisante. Cependant, dans les cas pratiques, on peut estimer que la convergence n'a lieu que si l'opérateur est au moins semi-défini-positif.

3. Résultats et conclusions.

D'une manière générale, on peut dire que la plus faible valeur de γ pour laquelle la convergence était obtenue était aussi la valeur optimale. Dans un seul cas (procédure a) - cf. fig. 1 - on a obtenu une valeur ($\gamma=2,96$) inférieure à la valeur optimale ($\gamma=3,06$) pour laquelle la convergence avait encore lieu. Cependant ceci est un peu le fruit du hasard de la recherche automatique. Dans tous les cas, si γ^* était la valeur optimale, la valeur $\gamma = \gamma^* - 0,25$ rendait l'algorithme divergent.

On peut donc dire qu'il est juste nécessaire de rendre l'opérateur (III.2.14) positif, et qu'au delà, la modification quadratique ralentit la convergence. On avait déjà eu l'intuition mathématique (par une interprétation géométrique) de ce résultat dans l'algorithme [5].

Les figures 1,2,3 correspondent respectivement aux essais a), b), c). On a fait seulement figurer certaines valeurs convergentes (dont la meilleure obtenue). Elles donnent l'évolution du critère $J(u^k)$ avec le pas k d'itération de coordination. En comparant ces diverses courbes par transparence, on peut tirer les conclusions suivantes : l'utilisation de \bar{R} seule (b)) donne de meilleurs résultats que l'utilisation de \bar{Q} seule (a)), mais surtout, la "sensibilité" de la convergence à des valeurs de γ supérieures à l'optimum est plus faible avec \bar{R} qu'avec \bar{Q} .

C'est bien sûr ce deuxième point qui est le plus important car pratiquement on ne cherchera pas, comme nous l'avons fait ici, la "meilleure" valeur mais seulement une "bonne" valeur et il importe que la convergence obtenue ne soit pas de beaucoup inférieure à la meilleure convergence que l'on pourrait obtenir. Ce résultat sur la sensibilité s'explique si l'on considère les formules (III.3.21) à (III.3.24). En effet, on y voit que la matrice R intervient directement alors que la matrice Q est pré-et post-multipliée par l'opérateur $G^* \Phi^*$ et son adjoint qui "transportent" aussi du couplage.

Enfin, l'essai c) n'a pas donné de meilleurs résultats que b) et même, on peut dire, des résultats moins bons concernant la sensibilité ce qui est logique au vu des considérations ci-dessus. Les meilleures valeurs des essais a) et b) ayant été respectivement: $\gamma_1^* = 3,06$ et $\gamma_2^* = 6,47$, on a pris $\beta = 0,48$ et on a obtenu la valeur $\gamma_3^* = 3,29$. Ces valeurs permettent de corroborer encore la thèse que la meilleure valeur de γ est dans tous les cas proche de la plus petite valeur qui assure la convergence. En effet, on peut faire le raisonnement heuristique suivant. Dans les trois essais a), b), c), on a ajouté à $B-A/2$ un opérateur M tel que :

$$\text{trace } (M) \sim \text{trace } (A/2 - B)$$

On en déduit les équivalences :

$$\begin{aligned} \text{trace } (\gamma_1^* \hat{Q} \hat{Q}^* \hat{Q} \hat{Q}) &\sim \text{trace } (\gamma_2^* \hat{R}) \sim \\ &\text{trace } (\gamma_3^* (\hat{R} + \beta \hat{Q}^* \hat{Q} \hat{Q} \hat{Q})) \end{aligned}$$

Comme $\beta = \gamma_1^* / \gamma_2^*$, la dernière trace peut s'écrire :

$$\text{trace } [(\gamma_3^* / \gamma_2^*) (\gamma_2^* \hat{R} + \gamma_1^* \hat{Q}^* \hat{Q} \hat{Q} \hat{Q})]$$

qui peut encore s'écrire en vertu de la première équivalence :

$$\text{trace } [(\gamma_3^* / \gamma_2^*) (2\gamma_2^* \hat{R})]$$

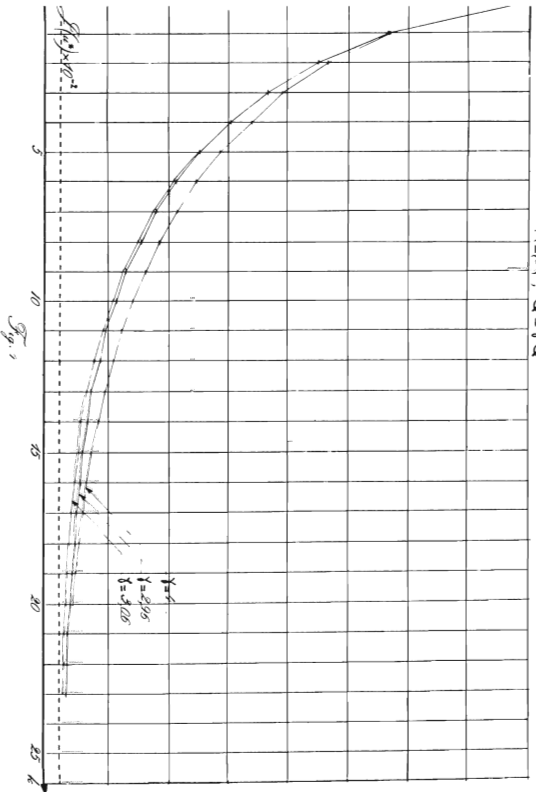
Finalement, on en déduit : $\gamma_3^* \sim \gamma_2^* / 2$

ce qui confirme à peu près l'expérience ($\gamma_2^* = 6,47$; $\gamma_3^* = 3,29$).

Pour terminer, la figure 4 représente l'évolution de $\rho(u^k)$ lorsque la dernière composante de la commande (u_3) est bloquée, après la première itération, à la trajectoire obtenue. L'essai correspond à $\bar{R} = \gamma_2^* \hat{R}$, $\bar{Q}=0$. On voit que la décroissance monotone est maintenue mais la stationnarité est vite atteinte.

$$\bar{I}_w(k) \times 10^{-4}$$

$$\bar{R} = \{ \sigma \} ; \quad \bar{Q} = \gamma \hat{Q}$$



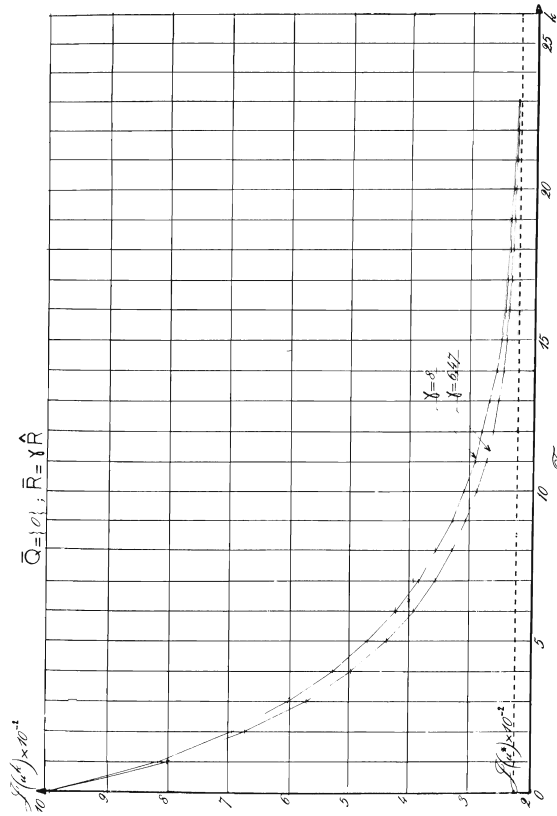
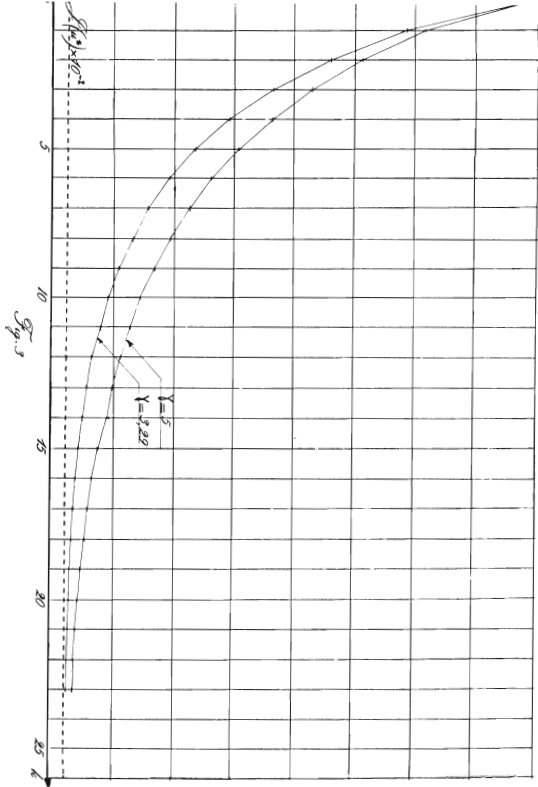


Fig. 2

$\hat{u}(k) \times 10^{-2}$

$\bar{Q} = \beta \hat{Y} \hat{Q} ; \bar{R} = \gamma \hat{R} ; \beta = 0.48$



$L(u) \times 10^{-2}$

Fonctionnement dégradé; u_3 en panne

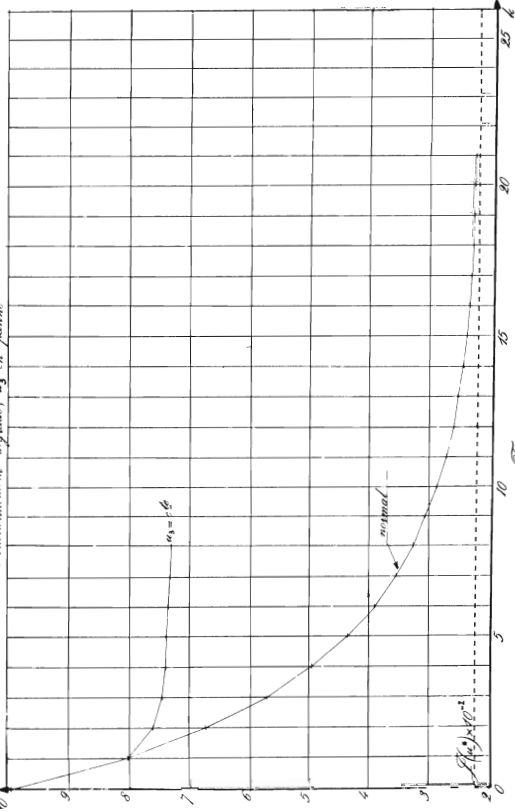


Fig. 4

UN CAS DE DECOMPOSITION COMPLETE

1. Le problème de la décomposition. Quelques considérations.

Dans les chapitres précédents, on a toujours supposé définie une décomposition des espaces d'état, de commande, etc..., cette décomposition introduisant des interactions qui ont été traitées par des méthodes de coordination donnant lieu à des algorithmes itératifs.

En étudiant les conditions de convergence de l'algorithme général du chapitre III, on a vu apparaître l'influence de la décomposition choisie sur la convergence (ou non convergence) et même sur la vitesse de convergence de cet algorithme coordonnateur.

La condition (III.2.5) résume cette influence et permet de s'en faire une idée au moins intuitive. Bien que nous ayons pu tourner cette condition par l'adjonction d'une modification quadratique (III.2.13), celle-ci ne fait que "stabiliser" l'algorithme en pondérant l'écart de deux commandes successives u^k et u^{k+1} . Il n'en est pas moins clair qu'il existe des décompositions plus ou moins naturelles d'un système global en sous-systèmes et que ceci se traduit sur la vitesse de convergence. Celle-ci est une formulation heuristique d'un critère de choix de "la meilleure décomposition".

Dans l'optique du §3 de l'introduction (décomposition horizontale en vue d'une commande décentralisée en ligne), la décomposition du système s'impose généralement d'elle-même par des considérations physiques. Il n'en va plus de même dès qu'il s'agit seulement de décomposition des calculs (optique du §1 de l'introduction)). La décomposition est alors uniquement

fonction du bon vouloir de celui qui a la charge de résoudre le problème. Cette question est d'autant plus critique, dans le cas d'un problème dynamique, que l'intervalle de temps $[t_0, T]$ sur lequel est posé le problème est long. Nous avons pu nous convaincre par des considérations heuristiques, sans avoir cherché à le démontrer théoriquement, avec les expressions (III.3.21) et (III.3.22), que la condition (III.2.5) était d'autant plus difficile à satisfaire que $[t_0, T]$ était grand (influence sur Φ et $\hat{\Phi}$).

Un cas extrême est celui où cet intervalle est infini. Dans ce cas, les itérations de coordination, manipulant des trajectoires $x^k(\cdot)$, $u^k(\cdot)$ etc... sont théoriquement impossibles. Pratiquement, on pourrait limiter l'intervalle, mais on devrait le garder suffisamment long, de sorte que la remarque précédente sur la condition de convergence jouerait certainement.

On va donc se pencher sur le problème du régulateur-statique (problème linéaire-quadratique à horizon infini) pour détecter, dans ce cas précis, si des manipulations simples (c'est-à-dire linéaires), que nous nous autorisons car nous traitons le problème hors-ligne, ne permettent pas de définir N sous-problèmes non interactifs, de sorte qu'aucune coordination ne soit nécessaire. Evidemment, ceci correspond à un cas idéal, mais comme on va le voir non trivial. Il resterait à prouver que, sortis de ce cas extrême, les manipulations que nous allons définir permettent d'approcher la meilleure décomposition et d'isoler les interactions les plus faibles possibles (offrant dans certains cas la possibilité d'une solution approchée en ignorant ces interactions ou en les traitant ensuite par des méthodes de perturbations comme KOKOTOVIC et al. [26a]).

2. Résultats préliminaires.

Le problème qui nous occupe ici est le suivant :

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad ; \quad x(0) = a \quad (2.1)$$

$$\min_u \int_0^{+\infty} (x', u') \begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} dt \quad (2.2)$$

$$\text{sous} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad (2.3)$$

Le vecteur d'état est de dimension n , le vecteur de commande de dimension m , les matrices F, G, Q, R, S sont des matrices de dimensions appropriées, indépendantes du temps. La paire (F, G) est supposée complètement commandable et R est supposée définie positive. Par contre, aucune hypothèse de positivité n'est faite sur la matrice :

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

ce qui explique la présence d'une contrainte telle que (2.3). Ce problème a été abondamment étudié par J.C. WILLEMS dans un remarquable article [39] qui fait ressortir l'importance, de la fonction Δ du nombre complexe s , à valeurs dans l'espace des matrices $(m \times m)$ à coefficients fractions rationnelles :

$$\begin{aligned} \Delta(s) = & R + S'(sI - F)^{-1}G + G'(-sI - F')^{-1}S \\ & + G'(-sI - F')^{-1}Q(sI - F)^{-1}G ; \quad s \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cette fonction a été initialement introduite par POPOV [33]. Elle a été abondamment étudiée par BERNHARD et COHEN [8] et certains des résultats obtenus seront rappelés et utilisés ici. Certains ont également pu être transposés au problème linéaire-quadratique non stationnaire (à horizon fini) (cf. BERNHARD et COHEN [9]). C'est qu'en fait l'interprétation de $\Delta(\cdot)$ est simple. Chaque fonction temporelle $(x(\cdot), u(\cdot) \dots)$ a son équivalent fréquentiel par la transformation de Laplace. Or le notera par la même lettre $(x(s), u(s) \dots)$. Ainsi, par des propriétés bien connues de cette transformation, (2.1) implique :

$$sx(s) - x(0) = Fx(s) + Gu(s) \quad (2.6)$$

$$\text{soit} \quad x(s) = \Phi(s)(Gu(s) + a) \quad (2.7)$$

$$\text{avec} \quad \Phi(s) = (sI - F)^{-1} \quad (2.8)$$

On voit que $\Phi(s)$ est l'équivalent fréquentiel de l'opérateur Φ de la définition II.1.1 et $\Delta(s)$ est l'équivalent de l'opérateur A dérivée seconde de φ (cf. formule (IV.3.7) avec $D = 0$).

La démonstration du théorème 3.1 ci-dessous nécessite quelques théorèmes préliminaires qui seront rappelés ici sans démonstration.

THEOREME 2.1 : Sous l'hypothèse de complète commandabilité de la paire (F,G) :

a) l'équation de Riccati algébrique :

$$FP + F'P - (PG + S)R^{-1}(G'P + S') + Q = 0 \quad (2.9)$$

a une solution symétrique réelle si et seulement si :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \Delta(i\omega) \geq 0 \quad (2.10)$$

$$(i^2 = -1, \quad \Delta(s) \text{ semi-définie positive sur l'axe imaginaire})$$

b) Sous l'hypothèse (2.10), il existe une solution maximale P^* de l'équation (2.9), c'est à dire que pour toute autre solution P , on a :

$$P^* - P \geq 0$$

De plus les parties réelles des valeurs propres de la "matrice bouclée" sont négatives ou nulles :

$$\operatorname{Re} \lambda(F - GR^{-1}(G'P^* + S')) \leq 0$$

et P^* est la seule solution de (2.9) pour laquelle ceci est vrai.

c) Sous la condition :

$$E \in \mathbb{R}^+, \Delta(i\omega) \geq EG'(-i\omega I - F')^{-1}(i\omega I - F)^{-1}G, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

P^* donne lieu à une matrice bouclée asymptotiquement stable :

$$\operatorname{Re} \lambda(F - GR^{-1}(G'P^* + S')) < 0 \quad (2.13)$$

d) Sous (2.12), la solution du problème (2.1) à (2.3), pour toute condition initiale α , est donnée par la loi de commande :

$$u = -Cx, \quad (2.14)$$

$$C = R^{-1}(G'P^* + S') \quad (2.15)$$

Ce théorème résume les principaux résultats de [39] où peut en être trouvée la démonstration.

On introduit maintenant l'

HYPOTHESE μ : F et $-F$ n'ont pas de valeur propre commune.

DEFINITION 2.1. : Etant donné un problème (2.1) à (2.3) défini par le quintuplet (F, G, Q^0, R, S^0) , on appelle famille \mathfrak{F} associée à ce problème la famille de problèmes définis par F, G, R et les matrices Q^Π et S^Π ainsi obtenues :

a) définir H^0 par les équations :

$$\Pi F + F' \Pi = -Q \quad (2.16)$$

$$\Pi G + S = H' \quad (2.17)$$

en y portant F, G, Q^0, S^0 (si où Π^0 par (2.16) et l'hypothèse μ puis H^0 par (2.17)).

b) pour toute matrice Π symétrique réelle, définir à partir des équations (2.16) et (2.17), et F, G, H^0 , un couple Q^Π et S^Π
L'hypothèse μ assure l'existence de la solution Π^0 dans a).

(cf. GANTMACHER [2], p.228]). Dans b), on peut utiliser toute matrice Π symétrique, réelle même non positive. Les équations (2.16) et (2.17) sont celles du lemme de YACUBOVIC-KALMAN-POPCOV ou "lemme positif réel".

THEOREME 2.2. : Avec toutes les hypothèses précédentes, la famille \mathfrak{F} est telle que :

- a) tous ses problèmes ont la même fonction $\Delta(s)$ qui vaut :

$$R + G'(-sI - F')^{-1}H^0 + H^0(sI - F)^{-1}G \quad (2.18)$$

- b) ils ont tous le même feedback C et donc la même solution.

Désormais, nous noterons H au lieu de H^0 , puisque cette matrice est commune à toute une famille \mathfrak{F} . Le théorème ci-dessus exprime que toute une famille \mathfrak{F} est incluse dans la même classe d'équivalence de problèmes définie par la relation "ont la même fonction Δ " et aussi dans la même classe d'équivalence définie par la relation "ont la même solution". On peut même montrer réciproquement le :

THEOREME 2.3 : Avec les mêmes hypothèses que ci-dessus

- a) tous les problèmes du type (2.1) à (2.3) ayant la même fonction Δ et la même dynamique (F, G) sont obtenus à partir de l'un deux par la construction de la famille \mathfrak{F} .
- b) Tous les problèmes du type (2.1) à (2.3) ayant le même feedback C (tel que $F - GC$ soit asymptotiquement stable), la même dynamique (F, G) , et la même matrice R sont obtenus à partir de l'un deux par la construction de la famille \mathfrak{F} .

Lorsque la dynamique (F, G) n'est pas imposée, on tombe sur le problème de la réalisation minimale de Δ , traitée en [8] où figurent les démonstrations des théorèmes 2.2 et 2.3.

Enfin on peut trouver en [8] ou en [9] la démonstration du

THEOREME 2.4.: Si la paire (H,F) n'est pas observable, on peut trouver une base de l'espace d'état où H,F,G prennent la forme :

$$H = (H_1, 0) \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ F_3 & F_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

où F_2 est la restriction de F au sous-espace des états non-observables. Alors, si F_2 est asymptotiquement stable, en considérant le problème de taille réduite :

$$\dot{x}_1 = F_1 x_1 + G_1 u \quad ; \quad x_1(0) = \alpha_1 \quad (2.20)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0 \quad (2.21)$$

$$\min_u \int_0^{+\infty} (x_1', u') \begin{pmatrix} 0 & H_1' \\ H_1 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u \end{pmatrix} dt \quad (2.22)$$

dont la solution (feedback C_1) existe, on obtient le feedback optimal du problème initial par :

$$C = (C_1, 0). \quad (2.23)$$

On peut voir facilement que (2.19) et (2.23) impliquent que la paire (C,F) n'est pas complètement observable. Des résultats plus précis sur le lien entre l'observabilité des paires (H,F) et (C,F) et leurs noyaux sont contenus dans [8] et [9]. Le théorème 2.4 indique un test linéaire qui permet de réduire éventuellement la taille du problème (2.1) à (2.3).

3. Une condition suffisante de décomposition complète du problème du régulateur stationnaire.

Comme nous l'avons vu la transformation de Laplace permet d'exprimer l'état explicitement en fonction de la commande dans le domaine fréquentiel (cf. (2.7)-(2.8)) et l'égalité de

Parseval permet d'exprimer le critère (2.2) avec ces éléments de sorte que l'on peut transformer le problème initial en la minimisation d'un critère quadratique (exprimé en $u(s)$ uniquement), sur l'ensemble des $u(s)$ réalisables c'est à dire dont la réalisation temporelle est non anticipative. On a montré (cf.[16]) que la résolution de ce problème fréquentiel est étroitement liée à la factorisation forte de $\Delta(s)$ que permet l'équation de Riccati (2.9). La condition (2.10) exprime que le critère quadratique est convexe et la condition (2.12) est équivalente à une propriété de coercivité de $\Delta(s)$, dont on rappelle qu'il est l'opérateur dérivée seconde du critère.

Supposons que pour une certaine décomposition de l'espace des commandes en N composantes, $\Delta(s)$ soit bloc-diagonal. Il est alors clair que le critère quadratique devient additif par rapport aux $u_i(s)$ et que le problème se décompose en N problèmes indépendants. Il est naturel de penser que cette décomposition doit se transposer au domaine temporel. Ce qu'il faut noter est le fait que le caractère bloc-diagonal de $\Delta(s)$ indique une décomposition de l'espace de commande mais non une décomposition de l'espace d'état. Le théorème suivant va montrer le résultat remarquable que la décomposition de la commande implique une décomposition de l'état en N parties distinctes (dont la somme des dimensions n'excède pas la dimension de l'état global), et que N problèmes du régulateur indépendants peuvent être formulés dans le domaine temporel avec ces parties de la commande et de l'état pour donner la solution cherchée. Ce théorème a déjà été publié dans [17].

THEOREME 3.1. : Soit un problème du type (2.1) à (2.3) avec les hypothèses :

- a) (F,G) complètement commandable.
- b) R définie positive.
- c) $\Delta(s)$ vérifie la condition (2.12)
- d) F vérifie l'hypothèse N.
- e) H (obtenue par la définition 2.1) est telle que la paire (H,F) est complètement observable.
- f) $\Delta(s)$ est bloc-diagonale pour une certaine décomposition de la commande.

alors il existe une base de l'espace d'état et un

critère équivalent (de la famille \mathfrak{F}) (\hat{Q}, \hat{S}) , tels que $F, G, \hat{Q}, R, \hat{S}$ soient toutes bloc-diagonales dans cette base par rapport à la décomposition précédente de l'espace de commande et une décomposition de l'espace d'état en somme directe. Alors, le feedback optimal C est lui-même bloc-diagonal et obtenu par la résolution des N problèmes du type (2.1) à (2.3) plus petits et indépendants.

COROLLAIRE 3.1 : Si l'hypothèse e) n'est pas satisfaite mais si dans la décomposition (2.19), F_2 est asymptotiquement stable, le théorème 3.1 s'applique au problème de taille réduite (2.20) à (2.22) et par conséquent, par le théorème 2.4) (cf.(2.23)), la solution du problème initial est encore obtenue par résolution de N problèmes plus petits et indépendants.

DEMONSTRATION :

a) Si $|s| \rightarrow +\infty$, $\Delta(s) \rightarrow R$ donc R est bloc-diagonale. D'après le théorème 2.2, $\Delta(s)$ peut-être écrit selon (2.18), d'où l'on en déduit que $H(sI-F)^{-1}G + G'(-sI-F')^{-1}H'$ est bloc-diagonale. Décomposons, selon la décomposition de u , les matrices H et G :

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix} \quad G = (G_1 \dots G_N) \quad (3.1)$$

Le bloc (i, j) de $\Delta(s)-R$ est nul si $i \neq j$, ce qui s'écrit :

$$\forall i, j, i \neq j : H_i(sI-F)^{-1}G_j = -G_j'(-sI-F')^{-1}H_i' \quad (3.2)$$

Les deux membres de cette égalité sont des matrices de fractions rationnelles en s . Leurs pôles sont respectivement parmi les valeurs propres de F et celles de $-F$. Ces deux ensembles sont disjoints d'après l'hypothèse μ . Il en résulte évidemment

que les deux membres de (3.2) n'ont pas de pôles. Ce sont donc des polynômes. Mais ils ont une limite nulle quand $|s| \rightarrow +\infty$. Ce sont donc des matrices $m_i \times m_j$ nulles partout.

On en déduit finalement que $H(sI-F)^{-1}G$ et son transposé et para-conjugué (changement de s en $-s$) sont bloc-diagonaux séparément.

b) $H(sI-F)^{-1}G$ est donc la somme directe de N matrices de transfert $\{H_i(sI-F)^{-1}G_i, i=1, \dots, N\}$ de systèmes linéaires. Soit $(\pi_{i1}, F_{i1}, G_{i1})$ une réalisation minimale de chacune de ces matrices c'est-à-dire que (H_{i1}, F_{i1}) est complètement observable et (F_{i1}, G_{i1}) est complètement commandable (cf. KLEINMAN [25]). Soit n_i la dimension d'état de cette réalisation. Alors, on peut voir facilement que :

$$\begin{pmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{NN} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{NN} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{NN} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

est une réalisation minimale de $H(sI-F)^{-1}G$. Comme la réalisation (H, F, G) initiale d'après les hypothèses a et e) est aussi minimale et que la réalisation minimale est unique à un changement de base d'état près (cf. [25]), il en résulte que :

$$\sum_{i=1}^N n_i = n \quad (3.4)$$

c) Considérons les N problèmes indépendants :

$$\dot{x}_i = F_{i1}x_i + G_{i1}u_i, x_i(0) = x_{i1} \quad (3.5)$$

$$\min_{u_i} \int_0^{+\infty} (x_i', u_i') \begin{pmatrix} 0 & H_{i1}' \\ H_{i1} & R_{i1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ u_i \end{pmatrix} dt \quad (3.6)$$

$$\text{sous } \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0 \quad (3.7)$$

Ils ont, pour fonction Δ , les N blocs Δ_{ii} de la fonction Δ initiale. Il est facile de voir qu'ils vérifient chacun les hypothèses a) à e) du théorème 3.1 (y compris la condition (2.12)). Ils ont donc chacun une solution et un feedback optimal $C_i (m_i \times n_i)$. La concaténation de ces problèmes a donc pour solution le feedback bloc-diagonal :

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_N \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

(dans la nouvelle base d'état), pour fonction Δ la même que celle du problème initial, ainsi que la même dynamique (F, G) à un changement de base près). Par conséquent, par les théorèmes 2.3-a) et 2.2-b), le problème concaténé et le problème initial ont le même feedback (à un changement près de base d'état près). Le théorème est donc démontré, le paragraphe suivant décrit la démarche pratique à suivre pour obtenir la solution dans la base initiale ■

4. Procédure pratique de résolution et de changements de base :

- a) Si $\Delta(s)$ est bloc-diagonale, une condition nécessaire est que R le soit. Pour tester cette hypothèse, on doit disposer d'un algorithme de permutations simultanées des lignes et des colonnes (changements de la numérotation des commandes) permettant, si c'est possible, de lui donner cette forme. Cette question n'est pas abordée ici.
- b) On doit ensuite tester, selon la décomposition définie ou toute autre obtenue par regroupement de certains sous-systèmes, que $H(sI-F)^{-1}G$ est bloc-diagonale. Pour cela, il faut former cette quantité en calculant la matrice de transition, et la matrice H , selon la procédure de la définition 2.1. Il convient de tester l'hypothèse e) du théorème 3.1, afin de voir éventuellement si le théorème 2.4 ne s'applique pas (existence d'un "régulateur réduit").

Remarquons de plus que pour que $H(sI - F)^{-1}G$ soit bloc-diagonale, il suffit qu'elle le soit dans un ouvert quelconque car c'est une fonction analytique.

- c) Supposant $\Delta(s)$ bloc-diagonale, on doit trouver une réalisation minimale de chaque bloc, à partir de la réalisation non minimale H_i, F_i, G_i de dimension n_i . Il faut trouver un changement de base d'état tel que les n_i premiers vecteurs de la nouvelle base soient la base d'un sous-espace obtenu par intersection du sous-espace des états commandables (sous-espace image de la matrice de commandabilité) et d'un supplémentaire des états non observables (noyau de la matrice d'observabilité). Soit B_i une telle matrice de changement de base et soit :

$$y_i = B_i x \quad (4.1)$$

l'expression de l'état x dans la nouvelle base. Soit y_{ii} les n_i premières coordonnées de y_i (de dimension n_i). Soit E_i les n_i premières lignes de B_i . Alors :

$$y_{ii} = E_i x \quad (4.2)$$

Soit A_i la matrice E_i^{-1} et D_i les n_i premières colonnes de A_i . Soit H_{ii}, F_{ii}, G_{ii} la réalisation minimale exprimée dans la nouvelle base. On a :

$$F_{ii} = E_i F D_i \quad (4.3)$$

$$G_{ii} = E_i G_i \quad (4.4)$$

$$H_{ii} = H_i D_i \quad (4.5)$$

- d) On résout les N problèmes du régulateur (3.5) à (3.7) avec les matrices $\{F_{ii}, G_{ii}, H_{ii}, i=1, \dots, N\}$. Soit C_i les feedbacks optimaux. Il s'agit de trouver l'expression de (3.8) dans l'ancienne base d'état.

e) D'après (4.2), il est aisé de constater que le nouvel état global :

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1m} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

est obtenu par :

$$y = Ex \quad (4.7)$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Soit \bar{C} la matrice (3.4) et C son expression dans l'ancienne base. On a :

$$C = -\bar{C}y = -Cx$$

d'où l'on tire d'après (4.7) :

$$C = \bar{C}E \quad (4.9)$$

On constate donc finalement que la solution est obtenue, après résolution des N problèmes au pas a), par un calcul linéaire à partir d'une matrice E obtenue (comme en (4.8)) sans calcul à partir des N changements de base destinés à réduire les réalisations de chaque bloc à des réalisations minimales (pas c)). Cette réduction n'est pas développée ici. Elle consiste à chercher simultanément les colonnes et les lignes indépendantes respectivement des matrices de commandabilité et d'observabilité.

5. Conclusions

- a) Etant donné un système dynamique stationnaire, complètement commandable (F,G) et un feedback C tel que $F-GC$ soit asymptotiquement stable, tous les critères $(Q;R,S)$ tel que C soit solution du problème (2.1) à (2.3) sont trouvés par la procédure suivante (cf. BERNHARD et COHEN [8]) :
- 1) choisir $R > 0$ quelconque.
 - 2) former :

$$\Delta(s) = W'(-s)W(s) \quad (5.1)$$

$$\text{avec } W(s) = N(I+C(sI-F)^{-1}G) \quad (5.2)$$

$$\text{et } R = N'N \quad (N > 0) \quad (5.3)$$

c'est à dire choisir :

$$Q = C'RC \quad (5.4)$$

$$S = C'R \quad (5.5)$$

- 3) Construire la famille \mathfrak{Z} à partir du couple initial (5.4)-(5.5) (cf. définition 2.1).

Supposons alors que dans une certaine base, les matrices F, I, C soient toutes bloc-diagonales selon une certaine décomposition de la commande et de l'état. Si, au pas 1) ci-dessus, on utilise une matrice R bloc-diagonale et au pas 3), dans la construction de la famille \mathfrak{Z} , on n'utilise que des matrices Π bloc-diagonales, on obtiendra aussi des matrices Q et S bloc-diagonales. Par contre si

- 4) On effectue un changement de base d'état quelconque,
- 5) On utilise une matrice Π non bloc-diagonale,
- 6) On utilise une matrice R non bloc-diagonale,

on construira des problèmes ayant encore la même solution mais qui

ne seront pas, de façon évidente, sous forme entièrement décomposable.

Les résultats ci-dessus ont montré que les transformations 4) et 5) peuvent être détectées et rectifiées pour redonner une forme décomposable car ces transformations n'affectent pas la forme de Δ . Par contre la transformation 6) (changement de R et de Q et S conformément à (5.4)-(5.5)) qui conserve la solution G , affecte Δ et ne peut donc pas être détectée.

On peut voir que le changement de u en $v=Nu$ (qui rend R égale à l'identité) ne fournit pas de solution satisfaisante. Il faudrait en effet tester si $N^{-1}W(s)$ est bloc-diagonale, mais la recherche de $W(s)$ à partir de $\Delta(s)$ est une factorisation forte équivalente à la résolution du problème global.

b) ce qui précède est valable si (H,F) est complètement observable ou si la restriction F_2 de F au noyau non observable est asymptotiquement stable de sorte que la contrainte $x^\infty = 0$ automatiquement satisfaite pour la partie non observable qui n'intervient pas non plus dans le critère. Par contre, si F_2 n'est pas asymptotiquement stable, cela revient à rajouter une contrainte supplémentaire à un problème ne faisant intervenir à priori que la partie observable. Comme la partie non observable n'apparaît pas dans Δ (elle disparaît dans le produit $H(sI-F)^{-1}$) on ne peut pas tester si cette contrainte supplémentaire couple les sous-problèmes indépendants ou non.

c) On peut s'interroger sur l'utilité pratique immédiate de la procédure de résolution décomposée du paragraphe précédent. Cependant, au delà de l'intérêt pratique, les résultats de ce chapitre ont un intérêt théorique certain : le problème de la meilleure décomposition doit être abordé simultanément du point de vue de la dynamique et du point de vue du critère, et la fonction $\Delta(s)$ ci-dessus (ou son équivalent temporel dans le cas non stationnaire) est la quantité qui résume ces deux points de vue.

Ce phénomène était déjà apparu sur les conditions de convergence de l'algorithme du chapitre 3 appliquées au problème

linéaire-quadratique. Il serait très intéressant, si l'on pouvait progresser sur cette question, notamment par la théorie des perturbations, d'étudier la proximité de la solution du problème exact avec celle du problème entièrement décomposé dans le cas où $\Delta(s)$ comporte des termes "petits" en dehors des blocs de la diagonale, termes que l'on négligerait.

Ce qu'il convient de retenir est qu'une décomposition apparente au niveau de la commande (élément "externe") engendre une décomposition moins évidente de l'état (élément "interne").

CHAPITRE VII

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES SUR LA COORDINATION EN LIGNE

1. Notion de coordination en ligne - Intérêt et difficulté.

Par comparaison avec l'algorithme de TAKAHARA qui est considéré comme une méthode de décomposition des calculs hors-ligne, nous avons dégagé à la fin du chapitre III quelques caractéristiques de notre algorithme qui le rend apte à une mise en oeuvre en ligne. Rappelons ces caractéristiques :

- a) Commande du système réel à chaque pas de coordination par mise en oeuvre de la dernière itérée des commandes locales.
- b) Décroissance monotone résultante du critère global.
- c) Utilisation de la réponse du système réel par le coordonnateur pour remettre à jour les paramètres de coordination.

Nous n'insisterons pas sur l'intérêt, qui a été illustré précédemment, de ces trois caractéristiques. Ajoutons simplement que dans une mise en oeuvre en ligne, on doit envisager une coordination fonctionnant en permanence car au delà des problèmes de convergence, il faut penser à une certaine adaptativité de l'ensemble de la structure de commande à des fluctuations du système réel (par exemple dans les conditions initiales de chaque période). A ce propos, il est clair que si une variation brutale intervient sur la condition initiale α au cours des itérations de coordination, l'algorithme s'adapte à ce changement grâce au point c) ci-dessus. Il reste à définir en quel sens le même algorithme s'adapte à une variation lente de α avec l'indice k d'itération et à démontrer cette adaptativité.

Une autre question qui préoccupe les chercheurs dans leurs tentatives de coordination en ligne des systèmes dynamiques est le problème de la stabilisabilité des sous-systèmes. En fait, le problème est généralement posé pour des sous-systèmes fonctionnant en boucle fermée (problème abordé plus loin) mais les remarques

que nous faisons ici resteraient valables dans ce contexte. On attaque généralement ce problème par des méthodes algébriques dans le cadre des systèmes linéaires constants (cf. AOKI [2a]) mais peu de résultats pratiques ont pu être obtenus par cette approche.

Ici nous entrevoyons une approche par la synthèse quadratique. Si le critère global est choisi pour entraîner la stabilité du système autour d'une trajectoire ($Q>0$), le point b) ci-dessus indique une stabilité de plus en plus grande au cours de la coordination. De plus, il conviendrait de se demander ce qu'apporte la modification quadratique dans le dosage de la stabilité de chaque sous-système.

Aux caractéristiques a), b), c) ci-dessus, on souhaiterait naturellement ajouter une caractéristique supplémentaire au niveau local qui complèterait le point c) (feedback au niveau coordonnateur) : c'est le problème de la définition et du calcul décentralisés d'une commande locale en boucle fermée sur l'état local.

D'une manière générale, la difficulté de la commande décentralisée en ligne, dans l'approche par prédiction des interactions, vient du fait suivant : alors que la commande locale doit être calculée sur un modèle local supposée recevoir une interaction prédite, elle doit être mise en oeuvre sur le système réel c'est-à-dire sur le même modèle local recevant une interaction différente (celle qui se produit vraiment) . Cette difficulté existait déjà au chapitre III, mais nous l'avons surmontée à cet endroit car, utilisant des commandes en boucle ouverte, éléments d'espaces L^2 de fonction du temps, nous avons pu mener des calculs de stationnarité (lemme III.2.1) qui ont permis de démontrer la décroissance monotone du critère global. Il n'en va plus de même avec des commandes en boucle fermée qui, même optimales, ne sont pas caractérisées par les équations de stationnarité.

Il faut alors faire appel à un nouveau principe de coordination qui sera évoqué au §3, ci-dessous. Auparavant, nous parlerons d'une idée de BENVENISTE et BERNHARD [5] et de l'algorithme résultant.

2. Découplage séparé de la dynamique et du critère.

a) Dans l'analyse ci-dessus de la difficulté de la commande décentralisée en ligne et en boucle fermée, le rôle de l'interaction de modèle est central et cette difficulté disparaît si l'interaction de modèle n'existe pas. (Pour un système linéaire (F, G) , $\tilde{F}=0$, $\tilde{G}=0$). Alors il n'y a plus de différence entre modèle local i et partie i du modèle global. Il est alors loisible d'appliquer la commande optimale locale, en boucle ouverte ou en boucle fermée, sur le système réel.

La seule interaction qui subsiste est celle du critère supposé non séparable ($\tilde{Q} \neq 0$ et (ou) $\tilde{R} \neq 0$). Il suffit alors d'utiliser la modification quadratique (III.3.25) où les matrices \tilde{Q} et \tilde{R} sont choisies de telle sorte que le critère global modifié soit additif, c'est-à-dire que l'on prend :

$$\tilde{Q} = -\tilde{Q} \quad ; \quad \tilde{R} = -\tilde{R} \quad (2.1)$$

Les parties bloc-diagonales de \tilde{Q} et \tilde{R} sont choisies pour assurer la convergence de l'algorithme du § III.3, ou mieux du § IV.3. On vérifiera dans ce dernier algorithme que le pas f) de calcul de λ^k n'a plus lieu d'être car la modification linéaire (opérateur d'interaction) est nulle. On vérifiera, au pas g) de résolution des sous-problèmes, que la simulation des systèmes locaux est inutile, car on applique directement la commande locale en boucle fermée sur le système réel (pas d)). On remarque en passant que tout algorithme en boucle fermée permet des économies de calcul par non simulation des modèles locaux (dans la mesure où la commande est obtenue directement en boucle fermée comme dans le cas linéaire-quadratique).

On peut démontrer, dans ce contexte, particulier, qu'une condition suffisante de convergence (impliquant (III.2.14)) est :

$$\tilde{R} + \frac{R}{2} > 0, \quad \tilde{Q} + \frac{Q}{2} \geq 0 \quad (2.2)$$

b) Dans le cas où la dynamique globale n'est pas découplée, on peut dans le cas des systèmes linéaires constants, recourir à la théorie du découplage (cf. SILVERMAN et PAYNE [34], WONHAM et MORSE [42]). Notons qu'ici le mot découplage n'a pas du tout le même sens que celui qu'il a au §1.3. Il s'agit là d'une homonymie fâcheuse.

Le résultat de cette théorie qui nous intéresse ici est le suivant (il est dû, dans son essence, à ROSENBROCK) :

THEOREME 2.1 : Si le système (F,G) est complètement commandable, il existe une décomposition de l'espace d'état, et un changement de commande :

$$u = -Dx + Tw \quad (2.3)$$

T étant inversible, tels que le système d'entrée w et de sortie soit découplé en m sous-systèmes à commande scalaire indépendants ;

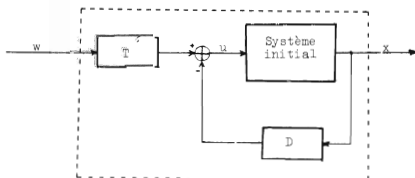


Fig 1.

Signalons aussi un article de KALMAN [26], où un algorithme apparaît pour le calcul des matrices de changement de base, et des matrices D et T. Cet algorithme, rectifié, a été programmé par l'auteur et s'est révélé très efficace.

Il est clair que le problème d'état x et de commande w peut maintenant être traité comme en a). Remarquons cependant que :

- 1) le théorème 2.1 ne s'applique qu'aux systèmes constants (dans la mesure où l'on souhaite évidemment une décomposition constante au cours du temps).
 - 2) on n'est pas maître de la décomposition de l'espace d'état.
 - 3) pour que la décomposition de l'espace d'état se traduise par une simple partition du vecteur d'état, il faut changer de base pour obtenir une base adaptée à la décomposition.
 - 4) la matrice D qui réalise un pré-feedback n'est pas forcément bloc-diagonale. Il faut donc une intervention du coordonnateur dans la mise en oeuvre de la commande qui n'est plus vraiment décentralisée (cf. fig. 1).
 - 5) de même, les nouvelles commandes locales w sont appliquées par l'intermédiaire de T .
3. Perspectives sur la commande décentralisée en boucle fermée et la coordination en ligne.

Les restrictions ci-dessus sur l'algorithme précédent montrent que celui-ci est, sauf dans certains cas particuliers où son intérêt est de fournir des commandes en boucle fermée, plutôt un nouvel algorithme de décomposition hors-ligne des calculs. De ce point de vue, il peut être avantageux de l'utiliser car les opérations linéaires de découplage de la dynamique semblent peu coûteuses avec l'algorithme de KALMAN dont nous avons parlé plus haut.

Le problème de la commande décentralisée en boucle fermée reste entier. Nous avons vu que la difficulté venait du fait que la prédiction de l'interaction entrant dans chaque sous-système ne se réalisait pas (ce qui est le propre de toutes les méthodes non admissibles par ailleurs plus commodes que les méthodes admissibles). L'idée qui surgit alors est de formuler les problèmes locaux de telle façon que la solution correspondante reste mathématiquement valide pour toute une plage de valeurs des interactions. Cette idée était déjà présente dans le livre de MESAROVIC et al. [30, dernier chapitre] mais nous lui avons donné corps par l'approche "commande

dans le cas le plus défavorable" utilisant la théorie des jeux différentiels. Ceci a donné lieu à un nouveau principe de coordination et un nouvel algorithme [13] présentant déjà les caractéristiques a), b), c) du §1, plus le fait que les commandes sont localement en boucle fermée. Cet algorithme fait encore l'objet d'études qui devraient l'améliorer pour le rendre apte à la commande décentralisée de systèmes dynamiques bruités.

On espère parvenir, par cette approche, à des algorithmes de coordination en ligne de systèmes où sont présentés des incertitudes de diverses natures. Cette approche est assez différente de l'approche "systèmes stochastiques décentralisés" mentionnées dans l'introduction, §4, dont les difficultés sont grandes et ont été rapidement discutées dans COHEN [16a].

REFERENCES

- [1] M. AOKI : "Aggregation", chapitre 5 du livre : "Optimization methods for large scale systems ... with applications", D.A. WISMER Editor, Mc Graw Hill, 1971.
- [2] M. AOKI : "On decentralized linear stochastic control problems with quadratic cost", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.-AC-18, n°3, pp. 243-249, June 1973.
- [2a] M. AOKI : "On feedback stabilizability of decentralized dynamic Systems", Automatica, Vol.8, pp. 163-173, 1972.
- [3] E. BAUMAN : "Trajectory decomposition", chapitre 7 du livre de la référence [1].
- [4] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, R.TEMAN : "Décomposition des problèmes d'optimisation", rapport non publié, IRIA, 1970.
- [4a] A. BENSOUSSAN : "Filtrage optimal des systèmes linéaires", Dunod, Paris 1971.
- [5] A. BENVENISTE, P. BERNHARD : "Commande optimale décentralisée des systèmes dynamiques", rapport interne A/50, Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau, 1973.
- [6] A. BENVENISTE, G. COHEN : "Comparaison de deux principes de coordination en commande hiérarchisée", Revue RAIRO, J-3 pp. 107-119, Novembre 1973.
- [7] P. BERNHARD : "Commande optimale, décentralisation et jeux dynamiques", à paraître, Dunod, 1975.

- [8] P. BERNHARD, G. COHEN : "Etude d'une fonction fréquentielle intervenant dans un problème de commande optimale avec une application à la réduction de la taille de ce problème", Revue RAIRO, J-2, pp 63-85, Juillet 1973.
- [9] P. BERNHARD, G. COHEN : "Complete dependence of the linear quadratic optimal control problem", Ricerche di Automatica, Vol.5, n°1, pp 1-15, July 1974.
- [10] C.B. BROSILOW, L.S. LASDON, J.D. PEARSON : "Feasible optimization methods for interconnected systems", Proceedings JACC, Troy, New York, 1965.
- [11] B. CHENEVEAUX : "Contribution à l'optimisation hiérarchisée des systèmes dynamiques", Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Nantes, Avril 1972.
- [12] C.Y. CHONG, M. ATHANS : "On the stochastic control of linear systems with different information sets", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-16, n°5, pp 423-430, October 1971.
- [13] G. COHEN : "A game theoretic approach to decentralized control", A paraître dans Applied Mathematics and Optimization, Springer Verlag.
- [14] G. COHEN : "Coordination of constrained optimization problems by resource allocation", Rapport interne A/49, Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau, Avril 1972.
- [15] G. COHEN : "On an algorithm of decentralized optimal control", A paraître dans Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1975.

- [15a] G. COHEN : "Coordination algorithms for Optimal Control problems", Rapport interne A/57, Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau, Mai 1974.
- [16] G. COHEN : "Optimisation dans le domaine fréquentiel", rapport interne E/38, Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau, Mai 1974.
- [16a] G. COHEN: "Commande par contre-réaction sous contrainte de structure d'un système stochastique linéaire-Résolution par une méthode de gradient", revue RAIRO, Novembre 1975.
- [17] G. COHEN, A. BENVENISTE : "Decentralization without coordination", Recherche de Automatica, Vol.5, n°1, pp 16-29, July 1974.
- [18] G. COHEN, A. BENVENISTE, F. BERNIARD : "Commande hiérarchisée avec coordination en ligne d'un système dynamique", revue RAIRO, J-4, pp 77-91, Décembre 1972.
- [19] G.B. DANTZIG, P. WOLFE : "The decomposition algorithm for linear program", Econometrica, Vol 29, pp. 767-778, 1961.
- [20] A.J. FOSSARD, M. CLIQUE, N. IMBERT : "Aperçus sur la commande hiérarchisée", revue RAIRO, J-3, pp. 3-40, Août 1972.
- [21] F.R. GANTMACHER : "Théorie des Matrices, Tome I", Dunod, Paris, 1965.
- [22] A.M. GEOFFRION : "Elements of large scale mathematical programming, Parts I and II", Management science, Vol 16, n°11, pp 652-691, July 1970.
- [23] A.M. GEOFFRION : "Primal resource-directive approaches for optimizing non linear decomposable systems", Operations Research, pp. 375-403, May-June 1970.

- [24] Y.C. HO, K.C.CHU : "Information structure in dynamic multi-person control problems", Automatica, Vol.10, pp. 341-351, 1974.
- [25] R.E. KALMAN : "Mathematical description of linear dynamical systems", SIAM Journal of Control, Vol.1, pp.152-192, 1963.
- [26] R.E. KALMAN : "Kronecker invariants and feedback", in "Ordinary differential equations", L.WEISS Editor, Academic Press, 1972.
- [26a] P.V. KOKOTOVIC, R.A. YACKEL : "Singular perturbation of linear regulators : basic theorems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-17, pp 29-37, February 1972.
- [27] L.S. LASDON : "Optimization theory for large systems" : Mac Millan Series for Operations Reserach, 1970.
- [28] L.S. LASDON; J.D. SCHOEFFLER : "A multilevel technique for optimization", proceedings JACC, Troy, New York, 1965.
- [29] J. MARSHAK, R RADNER : "The economic theory of teams", Yale University Press, New Haven, Connecticut, 1971.
- [30] M.D. MESAROVIC, D. MACKO, Y. TAKAHARA : "Theory of hierarchical, multilevel systems" , Academic Press, 1970.
- [31] M.D. MESAROVIC, D. MACKO, Y. TAKAHARA : "Two coordination principles and their application in large scale systems control", Automatica, Vol.6, pp 261-270, 1970.
- [32] J.D. PEARSON : "Dynamic decomposition techniques", chapitre 4 du livre de la référence [1].
- [33] V.M. POPOV : "Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions", revue roumaine des sciences et techniques, série électrotechnique énergétique, Vol.9, pp 628-690, 1964.

- [34] L.M. SILVERMAN, A.J. PAYNE : "Input-output structure of linear systems with applications to the decoupling problem", SIAM journal of Control, Vol.9, pp. 199-233, 1971.
- [35] Y. TAKAHARA : "Multilevel approach to dynamic optimization", report SRC-50-C-64-18, Systems Research Center, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, 1964.
- [36] Y. TAKAHARA, M.D. MESAROVIC : "Coordinability of dynamic systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-14 n°6, pp 686-698, December 1969.
- [37] H. TAMURA : "Application of duality and decomposition in high order multistage decision problems", Cambridge University, Engineering Department, report n°CUEB/B-control TR49, 1973.
- [38] A. TITLI : "Contribution à l'étude des structures de commande hiérarchisées en vue de l'optimisation des processus complexes", thèse de Doctorat d'Etat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1972.
- [39] J.C. WILLEMS : "Least Squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-16, pp. 621-634, 1971.
- [40] D.A. WISMER : "Distributed multilevel Systems", chapitre 6 du livre de la référence [1].
- [41] H. WITSENHAUSEN : "Information structures, feedback and causality", SIAM Journal of Control, Vol.9, pp 149-159, 1971.
- [42] W.M. WONHAM, A.S. MORSE : "Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems : a geometric approach", SIAM Journal of Control, Vol.8, pp 1-8, 1970.

COORDINATION PAR ALLOCATION

Cette méthode est décrite brièvement ici dans un contexte simple afin de montrer les difficultés qui y sont attachées en particulier dans le cas de systèmes dynamiques.

Considérons le problème d'optimisation :

$$\min_u \sum_i g_i(u_i) \quad (\text{A.1.1})$$

$$\text{sous } \sum_i c_i(u_i) = c \quad (\text{A.1.2})$$

avec : $u' = (u'_1, \dots, u'_N)$; $u_i \in U_i$; $g_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$;

$$c \in \Gamma ; c_i : U_i \rightarrow \Gamma$$

La seule interaction entre les N optimisations sur chaque u_i vient de la contrainte couplante (A.1.2). Elle peut s'interpréter comme l'utilisation d'une ressource commune par N unités économiques indépendantes. Pour résoudre les sous-problèmes indépendants, on peut "allouer" une quantité c_i de la ressource commune à chaque unité avec :

$$\sum_i c_i = c, \quad c_i \in \Gamma \quad (\text{A.1.3})$$

Le sous problème i devient alors :

$$\min_{u_i} g_i(u_i) \quad (\text{A.1.4})$$

$$\text{sous } c_i(u_i) = c_i \quad (\text{A.1.5})$$

Le problème de coordination consiste alors à trouver la meilleure allocation, c'est-à-dire à minimiser le critère global par rapport aux c_i sous la contrainte (A.1.3) (Notons qu'en

peut adopter la même démarche pour des contraintes inégalités).

Une étude de la coordonnabilité par ce principe de coordination peut-être trouvée dans [14] ainsi qu'un algorithme coordonnateur par gradient projeté sur la contrainte (A.1.3). Disons simplement ici que l'allocation optimale est atteinte lorsque les multiplicateurs de Lagrange associés aux N contraintes (A.1.5) sont égaux. Cette méthode de coordination, appelée méthode primale, a pour méthode qu'elle la coordination "par les prix" ou "découplage". Elle est admissible puisqu'à chaque pas de coordination, les solutions locales obtenues vérifient la contrainte (A.1.2).

Supposons maintenant que $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $\sum_i m_i = m$, et que $\Gamma = \mathbb{R}^q$. Pour que le problème global ait une solution il faut en général que :

$$q \leq m \quad (A.1.6)$$

mais cette condition ne garantit pas que :

$$q \leq m_i \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (A.1.7)$$

ce qui est en général nécessaire pour que chaque sous-problème ait une solution. C'est une première difficulté de la méthode.

Dans le cadre de la commande de systèmes dynamiques, on adopte maintenant le formalisme du §I.1. On suppose de plus, pour pouvoir appliquer la méthode d'allocation, que les interacteurs sont "séparables" c'est à dire que :

$$v_i = \sum_{j=1}^N H_{ij}(u_j, y_j) \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (A.1.8)$$

Il est facile, par des manipulations simples, de mettre les N contraintes (A.1.8) globalement sous la forme (A.1.2). Le couple (u, v) jouera ici le rôle de u , précédemment. On peut voir alors que le rôle du coordonnateur consiste à fixer les 2^2 valeurs $\{w_{ij}; i=1, \dots, N ; j=1, \dots, N\}$ et à poser les problèmes locaux sous la forme :

$$\max_{u_1, v_1} Q_1(u_1, v_1, x_1) \quad (A.1.9)$$

$$y_1 = P_1(u_1, v_1) \quad (A.1.10)$$

$$v_1 = \sum_j w_{1j} \quad (A.1.11)$$

$$\text{sous } H_{ji}(u_1, y_1) = w_{ji} \quad ; \quad j=1, \dots, N \quad (A.1.12)$$

On conçoit la difficulté technique extrême posée par la contrainte (A.1.12), à supposer que les conditions analogues à (A.1.7) soient satisfaites.

Signalons pour terminer que TITLI [38] a défini une méthode "mixte", compromis entre la méthode d'allocation et la méthode globale. Cette méthode ne lève que partiellement les restrictions précédentes. La méthode ci-dessus est qualifiée d'"admissible" dans [38] ("feasible" en anglais [10]).

ANNEXE 2

PROPRIETES DES OPERATEURS Φ

LEMME A.2.1. : Soient A, B, C trois matrices $n \times n$ pouvant
dépendre du temps sur $[t_0, T]$ et vérifiant à tout instant :

$$A = B + C \quad (A.2.1)$$

Soient Φ_A et Φ_B les opérateurs associés à A et B par la
définition II.1.1. On a :

$$\Phi_A = \Phi_B + \Phi_B C \Phi_A \quad (A.2.2)$$

DEMONSTRATION :

La formule (A.2.2) est une identité entre opérateurs, le dernier terme étant compris comme composition d'opérateurs dans $L^2([t_0, T], \mathbb{R}^n)$. En particulier C est l'opérateur instantané :

$$b = Ca \Leftrightarrow b(t) = C(t)a(t) \quad , \quad t \in [t_0, T] \quad (A.2.3)$$

Ceci précisé, considérant les équations :

$$\dot{x} = Ax + u \quad , \quad x(t_0) = 0 \quad (A.2.4)$$

$$\dot{\xi} = B\xi + Cx + u \quad , \quad \xi(t_0) = 0 \quad (A.2.5)$$

Supposant l'unicité des solutions sur $[t_0, T]$, et d'après (A.2.1) il est clair que $x = \xi$ pour tout $u(\cdot)$, ce qui s'exprime :

$$\Phi_A u = \Phi_B (C\Phi_A u + u) \quad , \quad \forall u \text{ d'où } (A.2.2) \quad \blacksquare$$

LEMME A.2.2 : Avec $F = \hat{F} + \tilde{F}$, et $G = \hat{G} + \tilde{G}$, on a : (A.2.6)

$$\hat{\Phi}(\tilde{F} \Phi G + \tilde{G}) = \Phi(\hat{F}\hat{\Phi}\hat{G} + \tilde{G})$$

DEMONSTRATION :

Appliquons d'abord le lemme précédent avec $A=F$, $B=\hat{F}$, $C=\tilde{F}$
 puis $A=\hat{F}$, $B=F$, $C=-\tilde{F}$; on établit :

$$\Phi - \hat{\Phi} = \hat{\Phi} \tilde{F} \Phi = \Phi \tilde{F} \hat{\Phi} \quad (A.2.7)$$

Alors le premier membre de (A.2.6) vaut :

$$\hat{\Phi} \tilde{F} \Phi G + \hat{\Phi} \tilde{G} = \hat{\Phi} \tilde{F} \Phi \hat{G} + (\hat{\Phi} \tilde{F} \Phi + \hat{\Phi}) \tilde{G}$$

par décomposition de G . Le premier terme est égal à $\hat{\Phi} \tilde{F} \hat{G}$ par utilisation de la deuxième égalité de (A.2.7) ; le second terme est égal à $\hat{\Phi} \tilde{G}$ par utilisation de la première égalité de (A.2.7). Il en résulte (A.2.6). ■

ANNEXE 3

RESOLUTION DU PROBLEME LINEAIRE-QUADRATIQUE A TEMPS DISCRET

Considérons le problème :

$$x(t+1) = F(t)x(t) + G(t)u(t) + v(t) \quad ; \quad t = t_0, \dots, T-1 \quad ;$$

$$x(t_0) = \alpha \tag{1.3.1}$$

où $v(\cdot)$ est une excitation extérieure ; $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Minimiser $\frac{1}{2} x'(T)Dx(T) + d'x(T) +$

$$\sum_{t=t_0}^{T-1} \left[\frac{1}{2} (x'(t), u'(t)) \begin{pmatrix} Q(t) & S(t) \\ S'(t) & R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} + (q'(t), r'(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right] \tag{A.3.2}$$

On peut soit résoudre ce problème par la méthode du Lagrangien, soit par l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman discrète. Posons :

$$x'(\cdot) = (x'(t_0+1), \dots, x'(T)) \quad ; \quad u'(\cdot) = (u'(t_0), \dots, u'(T-1)) \quad ;$$

$$\lambda'(\cdot) = (\lambda'(t_0+1), \dots, \lambda'(T)) \tag{A.3.3}$$

Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}(x, u, \lambda) = \frac{1}{2} x'(T)Dx(T) + d'x(T) + \sum_{t=t_0}^{T-1} \left[\frac{1}{2} (x'(t), u'(t)) \begin{pmatrix} Q(t) & S(t) \\ S'(t) & R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} + (q'(t), r'(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right] \tag{A.3.4}$$

$$+ (q'(t), r'(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} + \lambda'(t+1) (F(t)x(t) + G(t)u(t) + v(t) - x(t+1))]$$

Les conditions nécessaires d'optimalité s'écrivent :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.3.5})$$

La première redonne (A.3.1). La seconde donne :

$$u(t) = -R^{-1}(t) (G'(t)\lambda(t+1) + S'(t)x(t) + r(t)) \quad (\text{A.3.6})$$

Enfin, la dernière donne :

$$\lambda(t) = F'(t)\lambda(t+1) + Q(t)x(t) + S(t)u(t) + q(t) \quad ; \quad t = T-1, \dots, t_0+1 \quad (\text{A.3.7})$$

$$\text{et } \lambda(T) = D'x(T) + d \quad (\text{A.3.8})$$

En utilisant (A.3.6) dans (A.3.1) et (A.3.7)-(A.3.8), on obtient les équations d'Euler-Lagrange discrètes :

$$x'(t+1) = [F(t) - G(t)R(t)^{-1}S'(t)]x(t) - G(t)R(t)^{-1}G'(t)\lambda(t+1) + v(t) - G(t)R(t)^{-1}r(t) \quad ; \quad x(t_0) = \alpha \quad ; \quad t = t_0, \dots, T-1 \quad (\text{A.3.9})$$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= [F'(t) - S(t)R(t)^{-1}G'(t)]\lambda(t+1) + [Q(t) - S(t)R(t)^{-1}S'(t)]x(t) \\ &+ q'(t) - S'(t)R(t)^{-1}r(t) \quad ; \quad \lambda(T) = D'x(T) + d \quad ; \quad t = T-1, \dots, t_0+1 \end{aligned} \quad (\text{A.3.10})$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman discrète s'écrit, en désignant par $V(x, t)$ la "fonction Revenu" :

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \min_u [V(F(t)x + G(t)u + v(t), t+1) + \\ &\quad \frac{1}{2} (x', u') \begin{pmatrix} Q(t) & S(t) \\ S'(t) & R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + (q'(t), r'(t)) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}] \quad ; \quad t = t_0, \dots, T-1 \end{aligned} \quad (\text{A.3.11})$$

partant de :

$$V(x, T) = \frac{1}{2} x' D x + d' x \quad (A.3.12)$$

On cherche $V(x, t)$ sous la forme :

$$V(x, t) = \frac{1}{2} x' P(t) x + g'(t) x + h(t) \quad (A.3.13)$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{aligned} u(x, t) = & -(R(t) + G'(t)P(t+1)G(t))^{-1} [(G'(t)P(t+1)F(t) + S'(t))x \\ & + G'(t)(g(t+1) + P(t+1)v(t)) + r(t)] \end{aligned} \quad (A.3.14)$$

$$P(t) = Q(t) + F'(t)P(t+1)F(t)$$

$$\begin{aligned} -[F'(t)P(t+1)G(t) + S(t)][R(t) + G'(t)P(t+1)G(t)]^{-1} [G'(t)P(t+1)F(t) \\ + S'(t)] \quad ; \quad P(T) = D \quad ; \quad t = T-1 \dots, t_0 \end{aligned} \quad (A.3.15)$$

$$\begin{aligned} g(t) = & [F'(t) - (F'(t)P(t+1)G(t) + S(t))(R(t) + G'(t)P(t+1)G(t))^{-1}] \times \\ & [g(t+1) + P(t+1)v(t)] + q(t) - \\ & [F'(t)P(t+1)G(t) + S(t)][R(t) + G'(t)P(t+1)G(t)]^{-1} r(t) \quad ; \\ & g(T) = d \quad ; \quad t = T-1, \dots, t_0 \end{aligned} \quad (A.3.16)$$

$$\begin{aligned} h(t) = & h(t+1) + \frac{1}{2} v'(t)P(t+1)v(t) + g'(t+1)v(t) \\ & - \frac{1}{2} [(v'(t)P(t+1) + g'(t+1))G(t) + r'(t)][R(t) + G'(t)P(t+1)G(t)]^{-1} \times \\ & [G'(t)(P(t+1)v(t) + g(t+1)) + r(t)] \quad ; \quad h(T) = 0 \quad ; \quad t = T-1, \dots, t_0 \end{aligned} \quad (A.3.17)$$

RESOLUTION DU PROBLEME LINEAIRE QUADRATIQUE

A TEMPS CONTINU LE PLUS GENERAL

On considère le problème (IV.3.1)-(IV.3.2). On forme l'hamiltonien

$$H(x, u, \lambda) = \frac{1}{2} (x', u') \begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \lambda' (Fx + Gu + w) \quad (A.4.1)$$

Le minimum, à x et λ fixés, de H en u est obtenu par

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u^*(x, \lambda) = -R^{-1} [S' \lambda + S' x + r] \quad (A.4.2)$$

Les équations du principe du minimum de Pontryaguine deviennent alors :

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial H}{\partial \lambda} (x, u^*, \lambda) \right]' = (F - GR^{-1}S')x - GR^{-1}G'\lambda - GR^{-1}r + w ; x(t_0) = x_0 \quad (A.4.3)$$

$$\dot{\lambda} = - \left[\frac{\partial H}{\partial x} (x, u^*, \lambda) \right]' = (-Q + SR^{-1}S')x - (F' - SR^{-1}G')\lambda + SR^{-1}r - q ; \quad (A.4.4)$$

$$\lambda(T) = D x(T) + d$$

On peut aussi résoudre le problème par l'équation d'Hamilton-Jacobi Bellman : soit $V(x, t)$ la fonction Revenu :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)' (Fx + Gu + w) + \frac{1}{2} (x', u') \begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (A.4.5)$$

$$V(x, T) = \frac{1}{2} x' X' D x + a' x$$

Dans le cas quadratique, on cherche V sous la forme :

$$V(x, t) = \frac{1}{2} x' P(t)x + g'(t)x + h(t) \quad (A.4.6)$$

On trouve finalement :

$$\dot{P} + PF + F'P - (PG + S)R^{-1}(G'P + S') + Q = 0 \quad ; \quad P(T) = A \quad (A.4.7)$$

$$\dot{g} + [F' - (PG + S)R^{-1}G']g - (PG + S)R^{-1}r + Pw + q = 0 \quad ; \quad g(T) = d \quad (A.4.8)$$

$$\dot{h} - \frac{1}{2}(g'G + r'R^{-1}(G'g + r) + g'w = 0 \quad ; \quad h(T) = 0 \quad (A.4.9)$$

$$u = -R^{-1}[(G'P + S')x + G'g + r] \quad (A.4.10)$$